CURRENT ISSUES OF MATHEMATICS

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-115-2-1

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА

Вакал Л. П.
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

Вакал Є. С.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Довгий Б. П.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
м. Київ, Україна

Розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x). \qquad (1)$$

де $f(x)$ – задана на відрізку $[a,b]$ функція, $K(x,s)$ – задана у квадраті $\{a \le x \le b, a \le s \le b\}$ функція (ядро рівняння),

$y(x)$ – шукана функція (розв'язок рівняння). Для наближеного розв'язання рівняння (1) застосовують метод заміни інтеграла скінченною сумою з використанням тієї чи іншої квадратурної формули (прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо), метод заміни ядра на вироджене, ітераційні методи (послідовних наближень, простої ітерації та ін.).

Крім того, для розв'язання інтегрального рівняння (1) застосовують проекційні методи (колокації, найменших квадратів тощо [1]). Вони ґрунтуються на представленні наближеного розв'язку $y_n(x)$ рівняння (1) функцією, яка залежить від деяких параметрів $c_1,\ldots,c_n$, наприклад,

$$y_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), \qquad (2)$$

де $\phi_1,\ldots,\phi_n$ – задані лінійно незалежні функції. Після підстановки функції (2) в рівняння (1) утворюється інтегральна нев'язка ε:

$$\varepsilon(x;c_1,\ldots,c_n) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x), \qquad (3)$$

де

$$\psi_0(x,\lambda) = \phi_0(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\phi_0(s)\,ds - f(x),$$

$$\psi_i(x,\lambda) = \phi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\phi_i(s)\,ds, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Невідомі $c_1,\ldots,c_n$ визначаються з умови

$$\|\varepsilon(x;c_1,\ldots,c_n)\| \to \min_{c_1,\ldots,c_n}, \qquad (4)$$

де $\|\cdot\|$ – задана норма функції, наприклад, квадратична, рівномірна (або чебишовська) тощо. При традиційному підході для кожної з норм використовується свій метод пошуку оптимальних значень $c_1,\ldots,c_n$ [1, 2].

У роботі пропонується підхід, в якому задача (4) розглядається як задача оптимізації і для її розв’язання використовується диференціальна еволюція (ДЕ) – стохастичний метод оптимізації, призначений для пошуку глобального оптимуму функцій багатьох змінних [3]. Метод простий у реалізації, дозволяє використовувати різні норми нев’язки і потребує обчислення лише значень цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних [4–6].

У методі ДЕ для популяції векторів, які представляють собою можливі розв’язки задачі мінімізації (4), за допомогою операцій схрещування, мутації та селекції моделюються відповідні процеси біологічної еволюції. У результаті формується наступна популяція векторів, які мають менші значення цільової функції, ніж вектори попередньої популяції. Вказана послідовність операцій повторюється до тих пір, поки не виконається задана термінальна умова [3].

Нижче наводиться покрокова схема ДЕ для знаходження оптимальних значень параметрів наближеного розв’язку (2).

1. Генерується початкова популяція векторів $V_i = (v_{i1},\dots,v_{in})$, $i = 1,\dots,N$, де N – заданий розмір популяції ($5n \le N \le 10n$). Координати вектора V_i – випадкові дійсні числа із заданого відрізку (за умовчанням це $[-1, 1]$).

2. Обчислюються значення цільової функції $F(V_i)$:

$$F(V_i) = \| \varepsilon(x; v_{i1},\dots,v_{in}) \|, \ i = 1,\dots,N . \qquad (5)$$

При цьому відрізок $[a, b]$ замінюється деякою сіткою $E_m = \{x_1,\dots,x_m\}$ і у випадку, наприклад, квадратичної норми використовується формула

$$\| \varepsilon \| = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^2 (x_k; v_{i1},\dots,v_{in}) ,$$

у випадку рівномірної норми – формула
$\| \varepsilon \| = \max\limits_{k=1,\dots,m} | \varepsilon(x_k; v_{i1},\dots,v_{in}) |$.

3. Для кожного вектора V_i створюється мутантний вектор $\widehat{V}_i$:

$\widehat{V}_i = V_{r_1} + F \cdot (V_{r_2} - V_{r_3})$, $i = 1,\dots,N$,

де F – заданий коефіцієнт мутації ($0.4 \le F \le 0.6$), r_1, r_2, r_3 – випадкові цілі числа з проміжку $[1, N]$, $r_1 \ne r_2 \ne r_3 \ne i$, і за формулою (5) обчислюється $F(\widehat{V}_i)$.

4. Якщо $F(\widehat{V}_i) < F(V_i)$, то в наступну популяцію включається вектор $\widehat{V}_i$, у протилежному випадку – вектор V_i.

5. Якщо кількість популяцій не перевищує задане число *Gmax*, то здійснюється перехід на п. 3, інакше – еволюційний процес завершується і в популяції з номером *Gmax* визначається вектор, який має найменше значення цільової функції. Координати цього вектора є шуканими оптимальними значеннями коефіцієнтів $c_1,\dots,c_n$ наближеного розв'язку (2).

Наведена схема ДЕ модифікована порівняно зі стандартною схемою методу і не містить операції схрещування. При використанні ДЕ для розв'язання задачі (4) потрібне різноманіття векторів у популяції цілком забезпечується операцією мутації. Це дозволило спростити метод без шкоди для точності.

Метод ДЕ реалізовано в системі комп'ютерної математики Matlab. Проведено обчислювальні експерименти по розв'язанню низки тестових рівнянь. Порівняння наближених розв'язків, отриманих в експериментах, з відомими точними розв'язками цих рівнянь підтвердило ефективність використання ДЕ для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Література:

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Київ: Наукова думка, 1986. 544 с.

2. Вакал Л.П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2011. № 10. С. 78–84.

3. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.

4. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2017. Вип. 15. С. 24–30.

5. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Знаходження оптимальних параметрів емпіричних формул декількох змінних за допомогою еволюційних алгоритмів. *Математичні машини і системи*. 2018. № 3. С. 109–116.

6. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь за алгоритмом диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2020. № 1. С. 43–52.