Семенов А. С., к.физ.-мат.наук, доцент
Андриенко В. М., к.э.н., доцент
Одесский политехнический университет
г. Одесса, Украина

DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-158-9-25

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ ВАЛОВОГО ПРОДУКТА, ОПИСЫВАЕМОГО УРАВНЕНИЕМ ДУФФИНГА

Линейная модель динамики валового продукта, предложенная Нижегородцевым Р.М. [1], со временем была обобщена, модифицирована и исследована многочисленными авторами:

$$m(x,t)\ddot{x}+b\dot{x}+c(x)=f(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – совокупный обобществленный продукт;

$f(t)$ – совокупный объем инвестиций;

$m(x,t)$ – мера инертности хозяйственной системы;

$b\dot{x}$ – мера сопротивления переменам, происходящим под воздействием инвестиций;

$c(x)$ – функция накопления.

Считая функцию накопления равной $c(x)=\alpha x+\beta x^3$ и изменение объема инвестиций происходящим по закону $f(t)=\gamma sin\omega t$, получим из (1) классическое уравнение Дуффинга

$$m(x,t)\ddot{x}+b\dot{x}+\alpha x+\beta x^3=\gamma sin\omega t. \qquad (2)$$

Поведение реальных экономических систем при наличии кризисов, катастроф, самоорганизации, устойчивости и неустойчивости, с управляющими подсистемами, влекущими экономику в новое состояние вполне доступно исследованию при описании экономики, например, уравнением (2). Простой качественный анализ поведения системы (2) можно провести, например, на основе энергетических соображений, полагая сопротивление изменениям ничтожно малым, т. е $b\approx 0$. Эквивалентом потенциальной энергии U в приложении к экономической системе является интеграл от функции накопления $c(x)$, кинетической энергии

T соответственно половина произведения меры инертности системы m на квадрат скорости изменения совокупного общественного продукта, а полная энергия E – их сумма.

$$U(x)=\frac{\alpha x^2}{2}+\frac{\beta x^4}{4};T(x)=\frac{m\dot{x}^2}{2};E(x)=U(x)+T(x). \qquad (3)$$

Полагая параметр управления функционированием системы $\alpha>0$, рассмотрим картину на фазовой плоскости.

В случае $\beta>0$ (жесткая восстанавливающая сила) и малых $xU(x)\approx{\alpha x^2}/{2}$ и фазовые траектории – эллипсы. По мере увеличения амплитуды колебаний фазовые траектории все больше отличаются от эллиптических и период колебания начинает зависеть от амплитуды. Колебания системы становятся неизохронными. В случае $\beta<0$ (мягкая восстанавливающая сила) фазовая плоскость качественно отличается от предыдущего случая. Фазовые траектории при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$ уходят в бесконечность, реализуется неустойчивость, при полной энергии системы меньшей некоторого критического значения E_0. При $E = E_0$ фазовые траектории проходят через неустойчивое состояние равновесия типа седла и относятся к числу сепаратрис. Связанные с сепаратрисными многообразиями бифуркации могут приводить к возникновению странных аттракторов.

При $\alpha < 0$ вид фазовой плоскости и $U(x)$ качественно отличаются от предыдущего случая. На фазовой плоскости системы появляются три особые точки: два центра и седло. При уменьшении α в точке $\alpha = 0$ возникает бифуркация. Вместо одного устойчивого состояния равновесия возникают два центра, все боле удаляющихся от начала координат. Положения равновесия, соответствующие особым точкам типа «центр», неустойчивы. Странный аттрактор в этой системе реализуется при тех значениях f (внешнее воздействие), когда все режимы, которые могут быть устойчивыми, становятся неустойчивыми, решение (и система) начинают «блуждать» между неустойчивыми состояниями. Покинуть эту зону системе не позволяют потенциальные барьеры, система описывает весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания, т.е. хаос.

Абсолютно закрытых и абсолютно открытых систем не существует. Под внешним воздействием в экономической системе возникает неравновесность и цикличность, происходит выход на новый уровень самоорганизации. За периодом хаотической неустойчивости следует выбор аттрактора и формируется новая структура экономической системы. При определенных условиях хаос может стать источником порядка в экономической системе. Таким образом, экономическая система в процессе функционирования способна изменять свои внутренние взаимосвязи, порядок и организации под воздействием на нее внешних факторов. Однако воздействия эти не должны превышать некоторые критические для данной системы значения, т.к. иначе система может либо деградировать, либо вообще прекратить свое существование. Если флуктуации (случайные отклонения от среднего равновесного значения) достаточно велики, то система попадает в точки бифуркации в переломный критический момент развития, испытывает неустойчивость и разрушается. В процессе движения от одной точки бифуркации к другой происходит развитие экономической системы [2], осуществляется переход от одного аттрактора к другому. Аттракторы можно рассматривать как относительно устойчивые состояния системы, которые притягивают к себе множество путей развития системы, определяемые различными, например, начальными условиями.

Введение в исходное уравнение Нижегородцева (1) нелинейностей типа (2), обусловлено особенностями развития и функционирования экономических систем. Экономическим системам присуще наличие обратных связей, что как раз отражается в присутствии в уравнении (2) нелинейных членов. Рыночные механизмы через законы спроса и предложения, законы конкурентной борьбы, переток капитала образуют сеть обратных связей. Известно, что согласно принципу положительной обратной связи, изменения, возникающие в неравновесной системе накапливаются и усиливаются. В то время как отрицательные обратные связи позволяют восстанавливать и поддерживать рыночное равновесие. На свободном рынке цены, в конечном счете, регулируются отрицательными обратными связями.

Обнаружена [4] возможность существенного изменения поведения решения уравнения, типа уравнения Дуффинга, путем малого изменения его параметров. Тем самым появляется возможность подавления хаоса малыми изменениями управляющих параметров. Частичный обзор работ, посвященных этому вопросу содержится в [5].

На основе метода подавления хаоса, изложенного в работе [6], нами рассмотрено модифицированное уравнение Дуффинга

$$\ddot{x}+\delta\dot{x}-x+\beta\left(1+\eta\cos\left(\Omega t\right)\right)x^{3}=\gamma\cos\left(\omega t\right) \qquad (4)$$

и проведен численный анализ с использованием программного продукта Matlab решения при изменении, в частности, управляющих параметров и сочетания частот внешнего воздействия и функции накопления.

Исследования проводились в предположении малости регулирующего возмущения, т.е. $\eta \ll 1$, медленно меняющихся инвестиций и малого сопротивления изменениям, т.е. $\delta = 0.05$, и $\alpha = -1$. В качестве начальных условий выбирались координаты особых точек $(\pm\left(-\alpha/\beta)^{\frac{1}{2}};0\right)$ и седло с координатами $(0;0)$.

При неизменных параметрах задачи и возникшем хаосе, подавление хаоса достигается приведением частот к соотношению, например

$$\ldots;\ \omega 2.5;\ \omega 1.5;\ \omega 0.5=\Omega;\ 0.2=\omega$$

Проведенный численный эксперимент, например, при $\beta = 0.1; \delta = 0.05; \gamma = 0.5; \eta = 0.01$ показал выход решения на стационарный режим, причем внешние дополнительные воздействия накладываются на основные колебания и в силу неизохронности осциллятора подавляют резонанс.

Изменение начальных условий, например уже при (4.7;0) приводит динамику системы к хаосу. Увеличение амплитуды инвестиций γ уже начиная с значений $\gamma = 0.6$ выводит решение в отрицательную зону.

Существенное влияние на подавление хаоса имеет значение параметра η, связанного с накоплениями. С ростом этого параметра значения валового выпуска становятся значительно отрицательными и хаос не подавляется. Также связанный с накоплениями параметр β существенно влияет на подавление хаоса, с незначительным его ростом тут же возникает хаос.

Литература:

1. Нижегородцев Р.М. Вариационные методы макроэкономической оптимизации инвестиционных процессов. Финансовая математика ; под ред. Ю.М. Осипова, М.В. Грачевой, Р.М. Нижегородцева, Е.М. Зотовой. Москва : ТЕИС, 2001.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. Москва : Мир, 1980. 334 с.
3. Holms P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor. Philosophical Transaction of the Royal Society. London, 2003. Vol. 292.
4. 4. Ott T., Grebogi C., Yorke G. Controlling chaos. Phys.Rev.Lett. 1990. V. 64. № 11. P. 1196–1199.
5. 5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. Методы Автом. и телемех. 2003. № 5 С. 3–454; Autum. Remote Control 64; 5(2003). 673-713/
6. 6. Pettini M. Controlling chaos through parametric excitations. Dynamic and Stohastic Processes Eds. Lima R., Streit L., and Villa-Mends, R.V. Springer – Verlag. N.Y., 1988. P. 242–250.