DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-1

ПОБУДОВА РІВНОМІРНИХ СЕГМЕНТНИХ НАБЛИЖЕНЬ З ВІЛЬНИМИ ВУЗЛАМИ

Вакал Л. П., Вакал Є. С.

ВСТУП

При сегментній апроксимації інтервал наближення розбивається на декілька підінтервалів (сегментів) і на кожному з них функція наближається деяким аналітичним виразом (многочленом, дробово-раціональною функцією та ін.). Неперервність апроксиманта у вузлах розбиття інтервалу на сегменти у загальному випадку не вимагається. Існує чимало прикладних задач, наприклад, задача побудови функціональних перетворювачів[1], стиснення числових масивів[2], швидкісного і високоточного обчислення математичних функцій у системах зв'язку та комп'ютерній графіці[3] тощо, в яких апроксимант може бути розривною функцією – аби лише похибка наближення на усьому інтервалі була достатньо малою.

Принципово розрізняється два випадки сегментної апроксимації: з фіксованими вузлами розбиття на сегменти та з вільними (нефіксованими) вузлами, коли за рахунок вдалого розташування вузлів вдається значно зменшити похибку наближення. У випадку фіксованих вузлів задача сегментної апроксимації є лінійною, а у випадку вільних вузлів – нелінійною задачею багатовимірної оптимізації[4].

У роботі розглядається випадок апроксимації з вільними вузлами і пропонується метод побудови рівномірних сегментних наближень функцій многочленами і дробово-раціональними виразами. В цьому методі за допомогою диференціальної еволюції визначаються вузли

[1] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наукова думка, 1989. С. 4.

[2] Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации. Компьютерная математика. 2009. № 1. С. 99.

[3] Lee D-U, Luk W., Villasenor J., Cheung P.Y.K. Non-uniform segmentation for hardware function evaluation. Proc. Inter. Conf. on Field Programmable Logic and Applications, Lisbon, Portugal, Sept. 2003. P. 796.

[4] Vakal L.P. Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. Journal of Automation and Information Sciences. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68.

оптимального розбиття, для якого похибка сегментної апроксимації є мінімально можливою.

1. Постановка задачі та аналіз існуючих методів її розв’язання

Нехай $f(x)$ – неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ функція, $\prod_n$ – клас многочленів $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ степеня n, $\Re_n$ – клас нескоротних і неперервних на $[\alpha, \beta]$ дробово-раціональних функцій $R(x)$ виду

$$R(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^i \Big/ \sum_{i=0}^{n-l} b_i x^i \,,\ 0 \le l < n \,. \tag{1}$$

Оскільки кожний елемент класу $\Re_n$ неперервний на $[\alpha, \beta]$, то у знаменнику дробу (1) можна покласти $b_0 = 1$.

Визначення 1. Многочлен $P^*(x) \in \prod_n$ називається многочленом найкращого рівномірного (чебишовського) наближення функції $f(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$, якщо виконується умова

$$\min_{P \in \prod_n} \max_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) - P(x) | = \max_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) - P^*(x) | \equiv \rho \,. \tag{2}$$

Визначення 2. Функція $R^*(x) \in \Re_n$ називається дробово-раціональною функцією найкращого рівномірного наближення для $f(x)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, якщо

$$\min_{R \in \Re_n} \max_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) - R(x) | = \max_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) - R^*(x) | \,.$$

Позначимо r – кількість сегментів, T – сукупність розбиттів $\tau = \{\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_r \le \beta\}$ проміжку $[\alpha, \beta]$ на сегменти, $S(x)$ – апроксимант, що наближає функцію $f(x)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, $L(t_{j-1}, t_j)$ – найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ на сегменті $[t_{j-1}, t_j]$:

$$L(t_{j-1}, t_j) = \max_{x \in [t_{j-1}, t_j]} \left| f(x) - A_j^*(x) \right| , \tag{3}$$

де A_j^* – многочлен $P_j^* \in \prod_n$ або дробово-раціональна функція $R_j^* \in \Re_n$ найкращого рівномірного наближення для $f(x)$ на $[t_{j-1}, t_j]$. Важливо зазначити, що A_j^* на усіх сегментах належать до одного класу функцій.

При рівномірному сегментному наближенні апроксимант $S(x)$ представляє собою кускову функцію, кожна ланка A_j^* якої є найкращим рівномірним наближенням для функції $f(x)$ на відповідному сегменті. Апроксимант $S(x)$ можна записати у вигляді

$$S(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j^*(x)\,\Theta[(x - t_{j-1})(t_j - x)] \ , \qquad (4)$$

де $\Theta(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \ge 0 \end{cases}$ – функція Хевісайда. У випадку наближення многочленами апроксимант $S(x)$ можна розглядати як розривний рівномірний многочленний сплайн, а у випадку апроксимації функціями $R_j^* \in \Re_n$ – як розривний рівномірний раціональний сплайн[5].

Розглядається випадок рівномірної сегментної апроксимації з вільними вузлами. Задається лише степінь n апроксимантів та кількість сегментів r, при цьому розташування внутрішніх вузлів $t_1, \ldots, t_{r-1}$ не фіксується.

Визначення 3. Розбиття $\tau^* \in T$ відрізка $[\alpha, \beta]$ називається оптимальним, а його вузли $t_0^*, t_1^*, \ldots, t_r^*$ – оптимальними вузлами[6], якщо

$$L(\tau^*) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} L(\tau) \ , \qquad (5)$$

де

$$L(\tau) = \max_{1 \le j \le r} L(t_{j-1}, t_j) \ .$$

Задача сегментної апроксимації з вільними вузлами полягає у знаходженні оптимального розбиття τ^* та похибки наближення $\varepsilon = L(\tau^*)$ для цього розбиття. Вказана похибка ε буде мінімальною для заданої кількості сегментів r.

У випадку наближення многочленами, враховуючи співвідношення (2), формулу (5) можна записати у вигляді

$$L(\tau^*) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} \max_{1 \le j \le r} \min_{P \in \Pi_n} \max_{x \in [t_{j-1}, t_j]} | f(x) - P(x) | . \qquad (6)$$

Такий самий вигляд матиме вираз для $L(\tau^*)$ і у випадку наближення дробово-раціональними функціями (1). Отже, величину $\varepsilon = L(\tau^*)$ можна назвати мінімаксмінімаксною похибкою апроксимації функції $f(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$.

Для довільної неперервної на невід'ємному відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ оптимальне розбиття існує, хоча може бути і не єдиним [5, 6].

---

[5] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наукова думка, 1989. С. 7.

[6] Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minmax approximation problem. Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6, N 4. P. 296.

Визначення 4. Розбиття $\tau \in T$ називається розбиттям з рівними відхиленнями або балансним[7], якщо

$$L(t_{j-1}, t_j) = L(t_j, t_{j+1}), \; j = \overline{1, r-1}. \qquad (7)$$

Для довільної неперервної на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ балансне розбиття (7) існує, і воно є оптимальним (хоча оптимальне розбиття може і не бути розбиттям з рівними відхиленнями)[8].

Слід додати, що у випадку функції $f(x)$, яка задовольняє вимогам $f(x) \in C^{n+1}[\alpha, \beta]$, $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, при виконанні умов (7) рівномірне кускове наближення $S(x)$ многочленами $P(x) \in \prod_n$ непарного степеня n буде неперервною функцією[9].

Для розв'язання задачі рівномірної сегментної апроксимації розроблено низку методів і алгоритмів [7–13]. Ідея більшості з них полягає у знаходженні розбиття, для якого виконуються умови балансності (7). Наприклад, в алгоритмі [7] співвідношення (7) розглядаються як система $(r-1)$ трансцендентних рівнянь для визначення оптимальних внутрішніх вузлів $t_1, \ldots, t_{r-1}$. Для розв'язання системи застосовується метод Ньютона, кількість ітерацій якого напряму залежить від вибору початкового наближення[10]. Два алгоритми сегментної апроксимації многочленами, які запропоновані німецькими вченими [10, 11], зводяться до паралельної побудови послідовності дійсних чисел $L(\tau_j)$, що збігається до величини $L(\tau^*)$, і послідовності вузлів τ_j, яка збігається до оптимального розбиття τ^*. Ці алгоритми доволі громіздкі, однак збігаються для довільно вибраних початкових вузлів і досить швидко[11].

Метод, запропонований у роботі [12], дозволяє знаходити вузли сегментної апроксимації, які практично збігаються з

---

[7] Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minmax approximation problem. Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6, N 4. P. 296.

[8] Вершик А.М., Малоземов В.Н., Певный А.Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация. Сибирский математический журнал. 1975. Т. 16, № 5. С. 930.

[9] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наукова думка, 1989. С. 20.

[10] Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Под ред. В.Ф. Дем'янова и В.Н. Малоземова. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. С. 141.

[11] Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots. Mathematics of Computation. 1989. Vol. 53, N 187. P. 235.

оптимальними[12]. На першому етапі методу визначається мінімальна кількість сегментів r, необхідна для отримання кусково-многочленного наближення функції із заданою похибкою γ. На другому етапі – для визначеного числа сегментів r з вільним розташуванням вузлів знаходиться наближення з мінімально можливою похибкою $\varepsilon \le \gamma$.

Як показав наведений огляд, для наближення на сегментах у цих методах використовуються лише многочлени. Для підвищення ефективності розв'язання більш широкого кола задач з урахуванням особливостей функцій, які наближаються, доцільно застосовувати сегментну апроксимацію нелінійними функціями, зокрема, дробово-раціональними13. Крім того, процедури, що використовуються в цих методах і алгоритмах для пошуку оптимальних вузлів, є досить громіздкими. Тому актуальним є розробка нових ефективніших і простіших методів пошуку оптимальних вузлів сегментного наближення різними апроксимантами, в тому числі нелінійними.

Для вирішення цієї проблеми пропонується наступний підхід. З урахуванням вимоги виконання умов балансності розбиття (7) оптимальні вузли $t_1,\ldots,t_{r-1}$ рівномірної сегментної апроксимації функцій многочленами і дробово-раціональними функціями (1) знаходяться як розв'язок задачі мінімізації

$$\begin{aligned}
&\Lambda(t_1,\ldots,t_{r-1}) = \min,\\
&\left|L(t_j,t_{j+1}) - L(t_{j-1},t_j)\right| \le \Lambda,\ j = \overline{1,r-1},\\
&\Lambda \ge 0,\ \alpha < t_1 < \ldots < t_{r-1} < \beta
\end{aligned}$$

із застосуванням методу диференціальної еволюції (ДЕ). Цей метод був запропонований Р. Сторном и К. Прайсом [15] і призначений для пошуку глобального оптимуму недиференційовних, нелінійних функцій багатьох змінних. Він належить до прямих методів оптимізації, тобто потребує обчислення тільки значень цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних. Метод ДЕ стабільно знаходить оптимум функції за мінімальний час. Крім того, він простий у реалізації та використанні (має мало параметрів, що потребують налаштування)[14].

[12] Вакал Л.П. Рівномірне кусково-поліноміальне наближення. Комп'ютерні засоби, мережі та системи. 2006. № 5. С. 56.

[13] Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53, N 5. P. 759.

[14] Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. Journal of Global Optimization. 1997. Vol. 11. P. 341.

2. Побудова рівномірних сегментних наближень функцій многочленами і дробово-раціональними виразами з оптимальними вузлами

Метод ДЕ належить до групи еволюційних алгоритмів – нового класу стохастичних пошукових методів оптимізації, в яких моделюються базові процеси біологічної еволюції: відбір, схрещування і мутація (слід зазначити, що переважну більшість їх представлено в англомовній літературі, де термін «алгоритм» прийнято використовувати замість звичного для нас терміну «метод»[15]). До цієї групи алгоритмів входять також генетичні алгоритми, алгоритм оптимізації мурашиної колонії, бджолиний алгоритм тощо [16].

Еволюційний процес у методі ДЕ організовано наступним чином. Спочатку генерується деяка множина випадкових векторів (покоління популяції), які представляють можливі розв’язки задачі оптимізації. Далі формується нове покоління. Для кожного вектора зі старого покоління, який називається базовим, з використанням трьох інших випадкових векторів і арифметичних операцій над їхніми координатами генерується мутантний вектор. Над цим вектором виконується операція схрещування, в ході якої деякі його координати замінюються на координати базового вектора. Отриманий після схрещування вектор називається пробним. Якщо він виявляється кращим за базовий (значення цільової функції покращилось), то у новому поколінні базовий вектор заміняється на пробний, в інакшому випадку в новому поколінні зберігається базовий вектор. Таке правило відбору гарантує сталість розміру популяції в еволюційному процесі. У кожному поколінні для контролю швидкості пошуку визначається найкращий вектор. Умовами закінчення еволюційного процесу може бути, наприклад, досягнення бажаного значення критерію оптимізації, вичерпання заданого максимального числа поколінь тощо.

В цілому ДЕ представляє собою одну з можливих «неперервних» модифікацій генетичного алгоритму (див., наприклад [17, 18]). Водночас метод ДЕ має суттєву особливість, яка багато в чому визначає його властивості. Як джерело шуму при мутації в ньому застосовується не зовнішній генератор випадкових чисел, а «внутрішній», реалізований як різниця між випадково вибраними

---

[15] Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. С. 16.

векторами поточної популяції. Завдяки цьому метод ДЕ може динамічно моделювати особливості рельєфу функції та швидко проходити складні яри, забезпечуючи ефективність навіть у випадку складного рельєфу[16].

Для пошуку оптимальних вузлів з використанням методу ДЕ і побудови рівномірного сегментного наближення функції многочленами і дробово-раціональними виразами (1) пропонується такий алгоритм.

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерується початкове покоління векторів $V_i = (v_{1i}, \dots, v_{r-1,i})$, $i = \overline{1, Np}$, де Np – розмір популяції (один із параметрів налаштування алгоритму ДЕ). Координати кожного вектора – упорядковані за зростанням дійсні числа з інтервалу (α, β):

$$v_{ji} = \alpha + rand(0, 1) \cdot (\beta - \alpha), \;\; i = \overline{1, Np}\,, \;\; j = \overline{1, r-1}\,,$$

де $rand(0, 1)$ – випадкове число з проміжку $(0, 1)$. Тут координата з індексом j відповідає вузлу t_j.

2. Для базового вектора V_i ($i = \overline{1, Np}$) з поточного покоління вибираються три випадкові вектори V_b, V_c, V_d ($b \neq c \neq d \neq i$) і створюється мутантний вектор $\tilde{V}_b$:

$$\tilde{V}_b = V_b + Fm \cdot (V_c - V_d)\,,$$

де Fm – деяка додатна дійсна константа з проміжку $(0, 2]$, яка називається силою мутації. Вона визначає амплітуду збурень, що вносяться у вектор V_b зовнішнім шумом.

3. Обчислюються координати u_{ji} пробного вектора U_i за формулою

$$u_{ji} = \begin{cases} \tilde{v}_{jb}, & \text{if } rand(0,1) \le Cr \vee j = j_{rand}, \\ v_{ji}, & \text{if } rand(0,1) > Cr \wedge j \neq j_{rand}. \end{cases}$$

Тут Cr – задана ймовірність схрещування, з якою нащадок U_i успадкує викривлену мутацією генетичну ознаку від «батьківського» вектора V_b. Відповідну ознаку від V_i (іншого «батьківського» вектора) нащадок успадкує з імовірністю $(1 - Cr)$.

---

[16] Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв’язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. 2017. Вип. 15. С. 25.

4. У наступне покоління переходить той із векторів U_i та V_i, значення цільової функції якого менше. Такий оператор відбору гарантує, що найкраще значення цільової функції не буде пропущено. Це приводить до швидкої збіжності алгоритму. Цільова функція F обчислюється за формулою

$$F(V_i) = \max_{1 \le j \le r} \left| \rho_{j-1} - \rho_j \right|, \ i = \overline{1, Np},$$

де $\rho_j = L(\nu_{j-1,i}, \nu_{ji})$ – похибка найкращого рівномірного наближення (4) функції $f(x)$ многочленом або дробово-раціональною функцією (1) на сегменті $[v_{j\text{-}1,i}, v_{ji}]$, $j = \overline{1, r}$ ($\nu_{0i} = \alpha$, $\nu_{ri} = \beta$). Вибір такої цільової функції обумовлений намаганням знайти розбиття з рівними похибками апроксимації на сегментах, оскільки у цьому випадку будуть виконані достатні умови оптимальності розбиття (7).

У випадку наближення многочленами $P(x) \in \prod_n$ для знаходження на сегментах похибок апроксимації ρ_j $(j = \overline{1, r})$ застосовується алгоритм[17], який є реалізацією відомого другого методу Є.Я. Ремеза[18]. Він ґрунтується на характеристичній властивості найкращого рівномірного наближення (2) про наявність чебишовського альтернансу – набору щонайменше $(n+2)$ точок, в яких різниця $f(x) - P^*(x)$ по модулю дорівнює ρ і послідовно чергує знак. Метод Є.Я. Ремеза є ітераційним. Він полягає у побудові послідовності наборів $\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}$, яка збігається до чебишовського альтернансу, і розв'язанні на кожній ітерації системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів многочлена $a_0, a_1, \ldots, a_n$ і похибки наближення.

У випадку апроксимації нелінійними функціями (1) для обчислення похибок ρ_j $(j = \overline{1, r})$ використовується алгоритм найкращого рівномірного дробово-раціонального наближення [22]. Він базується на згаданому вище методі Є.Я. Ремеза для многочленів, модифікованому для апроксимації раціональними функціями. Система рівнянь, яку необхідно розв'язувати у цьому випадку на s-й ітерації, є нелінійною відносно коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_{n-l}$ і похибки наближення $\rho^{(s)}$.

[17] Вакал Л.П., Каленчук-Порханова А.О. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації. Математичні машини і системи. 2006. № 2. С. 19.

[18] Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. С. 49.

Після лінеаризації системи шляхом виключення невідомого $\rho^{(s)}$ її розв'язок знаходиться за методом Гауса. Далі останнє рівняння системи розглядається як функція $\Phi(\rho^{(s)}) \equiv \Phi[\rho^{(s)}, a_0(\rho^{(s)}), \dots, a_l(\rho^{(s)}), b_1(\rho^{(s)}), \dots, b_{n-l}(\rho^{(s)})]$ від $\rho^{(s)}$, і значення $\rho^{(s)}$ знаходиться за методом січних як корінь рівняння $F(\rho^{(s)}) = 0$ [19].

5. Еволюційний процес завершується, якщо виконується хоча б одна з умов:

– значення цільової функції найкращого вектора в поколінні менше деякої заданої величини γ;

– вичерпано максимальне число поколінь популяції $p_{\max}$;

– спостерігається стагнація еволюційного процесу, тобто розкид значень цільової функції в популяції менше заданої величини δ

$$\max_{i=1,\,Np} F(V_i) - \min_{i=1,\,Np} F(V_i) < \delta \cdot \min_{i=1,\,Np} F(V_i) .$$

Якщо жодна з перелічених умов не виконується, то відбувається перехід на п. 2. За умовчанням покладається $\gamma = 10^{-12}$, $p_{\max} = 200$, $\delta = 10^{-4}$.

6. Для найкращого вектора вузлів з останнього покоління на кожному із сегментів обчислюються коефіцієнти апроксиманта найкращого рівномірного наближення.

За описаним методом визначаються оптимальні вузли розбиття відрізку апроксимації $[\alpha, \beta]$ на r сегментів, коефіцієнти кускового апроксиманта $S(x)$ і похибка сегментного наближення цим апроксимантом. Слід підкреслити, що функція $S(x)$ має найменшу похибку апроксимації для заданої функції $f(x)$ серед усіх апроксимантів того самого класу і з таким самим числом сегментів r на проміжку $[\alpha, \beta]$.

Розмір популяції Np, сила мутації Fm та ймовірність схрещування Cr є основними параметрами налаштування алгоритму ДЕ. Рекомендований розмір популяції знаходиться в діапазоні $5(n+1) \le Np \le 10(n+1)$ [20]. Питання вибору значень інших параметрів

[19] Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53, N 5. P. 762.

[20] Вакал Л.П., Вакал Є.С., Довгий Б.П. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з використанням диференціальної еволюції. Computer Science and Applied Mathematics. 2021. №. 1. С. 19.

буде висвітлено в наступному розділі. Слід також зауважити, що через стохастичний характер ДЕ при алгоритмічній реалізації запропонованого методу для надійності отриманих результатів потрібно зробити декілька запусків алгоритму.

3. Чисельні результати та обговорення

З метою перевірки ефективності запропонованого методу для пошуку оптимальних вузлів і побудови рівномірних сегментних наближень за допомогою системи комп’ютерної математики Matlab виконано серію чисельних експериментів по апроксимації функцій многочленами і дробово-раціональними виразами (1) різних степенів і з різною кількістю вузлів розбиття проміжку наближення на сегменти.

Аналіз чисельних результатів показав, що за допомогою ДЕ для низки функцій вдається точніше віднайти значення оптимальних вузлів і відповідно отримати меншу похибку сегментного наближення кусковим апроксимантом (4), ніж за допомогою більш складних детерміністичних методів і алгоритмів, про які йшлося в огляді літератури.

Нижче наведено три приклади рівномірної сегментної апроксимації функцій, де результати, отримані за запропонованим методом, порівнюються з результатами, знайденими за допомогою інших методів.

Приклад 1. Потрібно знайти рівномірне сегментне наближення з оптимальними вузлами для функції $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ на відрізку $[-5, 5]$ многочленами степенів $n = 3, 4, 5$ з числом сегментів від двох до шести.

Для пошуку оптимальних вузлів застосовувався алгоритм ДЕ з такими значеннями параметрів: розмір популяції $Np = 50$, сила мутації $Fm = 0,4$, імовірність схрещування $Cr = 0,9$, число запусків алгоритму 10 (значення γ, $p_{\max}$, δ – за умовчанням). У табл. 1, де наведено отримані результати, перше число в комірках означає похибку сегментної апроксимації ε, усі наступні числа – значення внутрішніх оптимальних вузлів (зовнішні вузли збігаються з початком та кінцем проміжку апроксимації). Для порівняння у табл. 1 наведено також результати за детерміністичним алгоритмом [10]. Крім того, на рисунку представлено графіки функції $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ та кусково-многочленного апроксиманта $S(x)$ для випадку $n = 3$ з двома оптимальними внутрішніми вузлами $t_1 = -0,668$ і $t_2 = 0,668$

($r = 3$). Похибка сегментного наближення ε вказаним апроксимантом $S(x)$ дорівнює 0,01419.

Таблиця 1

Апроксимація функції $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ на відрізку $[-5, 5]$

r	Детерміністичний алгоритм			Алгоритм ДЕ		
	n = 3	**n = 4**	**n = 5**	**n = 3**	**n = 4**	**n = 5**
2	0,0448 0	0,0375 0	0,0215 0	0,0477 0	0,0375 0	0,0215 0
3	0,0142 -0,6745 0,6616	0,00265 -0,5643 0,7845	0,00137 -0,6738 0,6737	0,01419 -0,6680 0,6680	0,00260 -0,7772 0,7772	0,00136 -0,6744 0,6744
4	0,00586 -1,2839 0 1,2839	0,00091 -1,4899 0 1,4899	0,000313 -1,1361 0 1,1361	0,00581 -1,2804 0 1,2804	0,00091 -1,4899 0 1,4899	0,000312 -1,1424 0 1,1424
5	0,00286 -1,6614 -0,4102 0,4018 1,6341	0,000466 -1,7745 -0,5374 0,5399 1,7775	0,000103 -1,7225 -0,4019 0,4102 1,7287	0,00272 -1,6569 -0,4071 0,4071 1,6569	0,000460 -1,7791 -0,5399 0,5399 1,7791	0,000103 -1,7252 -0,4058 0,4058 1,7252
6	0,000451 -2,4581 -0,7826 0 0,7826 2,4581	0,000239 -2,0411 -0,7452 0 0,7452 2,0411	4,42·10-5 -2,0329 -0,7841 0 0,7841 2,0329	0,000448 -2,4559 -0,7810 0 0,7810 2,4559	0,000238 -2,0388 -0,7441 0 0,7441 2,0388	4,43·10-5 -2,0323 -0,7843 0 0,7843 2,0323

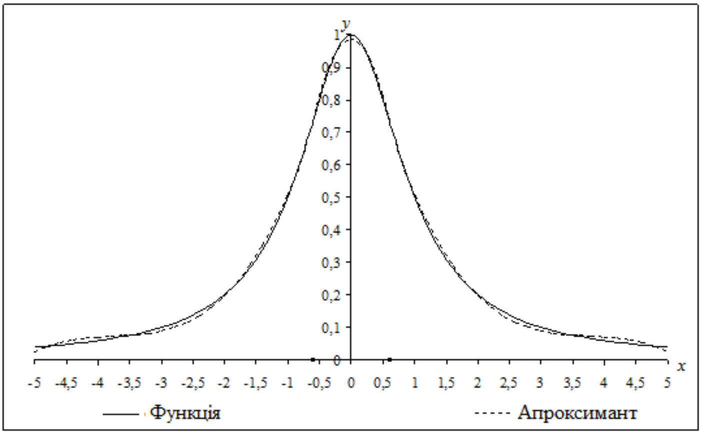

Рис. Графіки функції $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ та кусково-многочленного апроксиманта для випадку $n = 3$, $r = 3$

Приклад 2. Необхідно знайти рівномірне сегментне наближення з оптимальними вузлами для функції $f(x) = \sqrt{x}$ за допомогою раціональних дробів $R_{31}(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x}$ і $R_{32}(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x + b_2x^2}$ для випадків розбиття проміжку наближення $[0, 1]$ на два і три сегменти.

Для розв'язання цієї задачі застосовувався алгоритм ДЕ з такими самими значеннями параметрів налаштування, як і в прикладі 1. Результати обчислень наведені у табл. 2, де перше число в кожній комірці відповідає похибці сегментного наближення, а наступні числа – оптимальним вузлам. У табл. 2 наведено також похибки для випадку апроксимації функції одним виразом без розбиття проміжку наближення на сегменти ($r = 1$), щоб показати наскільки точність сегментної апроксимації краще.

Таблиця 2

Апроксимація функції на відрізку

r	Детерміністичний алгоритм		Алгоритм ДЕ	
	R_{31}	R_{32}	R_{31}	R_{32}
1	0,01077	0,00426	0,01076	0,00387
2	0,00145 0,0180	0,00042 0,0097	0,00145 0,0181	0,00036 0,0118
3	0,00037 0,0012 0,0650	0,000086 0,0004 0,0410	0,00037 0,0012 0,0641	0,000075 0,0005 0,0446

Приклад 3. Потрібно побудувати рівномірне сегментне наближення з мінімальною похибкою для функції $f(x) = \ln x$ на проміжку $[1, 2]$ за допомогою дробово-раціональних функцій $R_{21}(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 + b_1x}$ для випадку розбиття проміжку апроксимації на три сегменти.

За алгоритмом ДЕ отримано значення вузлів і похибок наближення на сегментах

$$t_1 = 1,259921; \; t_2 = 1,587401;$$

$$\rho_1 = 0,61757414 \cdot 10^{-6}; \; \rho_2 = 0,61757454 \cdot 10^{-6}; \; \rho_3 = 0,61757445 \cdot 10^{-6} \quad (8)$$

та знайдено коефіцієнти кускової дробово-раціональної функції $S(x)$ [21]:

$$S(x) \approx \begin{cases} \dfrac{-2.3860278 + 1.98971177\,x + 0.39631775\,x^2}{1 + 1.7825823291x}, & 1 \le x \le t_1, \\ \dfrac{-2.15497874 + 1.90613934\,x + 0.24966454\,x^2}{1 + 1.4148365376\,x}, & t_1 < x \le t_2, \\ \dfrac{-1.92392967 + 1.77235596\,x + 0.15727880\,x^2}{1 + 1.1229564916\,x}, & t_2 < x \le 2. \end{cases} \qquad (9)$$

Похибка $\varepsilon = \max_j \rho_j$ сегментного наближення функції $\ln x$ апроксимантом (9) дорівнює $0,61757454 \cdot 10^{-6}$. В роботі [24] для розглядуваної задачі апроксимації отримані такі вузли і похибки наближення на сегментах

$$t_1 = 1,259965; \quad t_2 = 1,587430;$$

$$\rho_1 = 0,6183 \cdot 10^{-6}; \;\; \rho_2 = 0,6174 \cdot 10^{-6}; \; \rho_3 = 0,6175 \cdot 10^{-6}. \qquad (10)$$

Похибки на сегментах (10) відрізняються одна від одної більше, ніж похибки (8). Це означає, що умови оптимальності розбиття (7) виконуються точніше для сегментного наближення (9), отриманого за алгоритмом ДЕ. Слід додати, що похибка $\varepsilon = 0,61757454 \cdot 10^{-6}$ сегментного наближення з оптимальними вузлами у 2,4 рази менше від похибки аналогічного наближення з рівновіддаленими вузлами[22], яка дорівнює $1,5 \cdot 10^{-6}$.

У чисельних експериментах досліджувався також вплив сили мутації Fm та ймовірності схрещування Cr на швидкість збіжності алгоритму ДЕ. Сила мутації характеризує максимально можливу відстань, на яку може розширитися область пошуку оптимуму по одній змінній за одне покоління популяції. Установлено, що із збільшенням сили мутації Fm зростає і число поколінь, необхідних для завершення алгоритму. Водночас при малих значеннях Fm є високим процент завершення алгоритму по умові стагнації. Рекомендовані значення для сили мутації лежать у діапазоні $0,4 \le Fm \le 0,6$. Що стосується ймовірності схрещування, то із збільшенням Cr кількість поколінь, потрібних для знаходження

[21] Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53, N 5. P. 763.

[22] Попов Б., Лаушник О., Сущик К. Нелінійні апроксимаційні моделі. Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 5. С. 35.

оптимуму цільової функції, зменшується. І навпаки, при зменшенні Cr кожне нове покоління все менше відрізняється від старого, тому для отримання оптимального розв'язку слід збільшити максимальне число поколінь $p_{\max}$. За результатами експериментів рекомендується задавати ймовірність схрещування в інтервалі $0,8 \le Cr \le 1$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто задачу рівномірної сегментної апроксимації з вільними вузлами, яка полягає у знаходженні оптимальних вузлів розбиття усього проміжку наближення на сегменти та визначенні похибки наближення для цього розбиття. Вказана похибка є мінімально можливою для заданої кількості сегментів.

Для пошуку оптимальних вузлів запропоновано застосувати алгоритм ДЕ, який відноситься до групи еволюційних алгоритмів. Це новий клас стохастичних пошукових методів оптимізації, в яких моделюються базові процеси біологічної еволюції. Алгоритм ДЕ дозволяє знаходити оптимум цільової функції за мінімальний час. Він простий у реалізації та використанні (містить мало параметрів налаштування, що потребують підбору).

Описано метод побудови рівномірних сегментних наближень функцій многочленами і дробово-раціональними виразами з оптимальними вузлами, які знаходяться за допомогою ДЕ. Для перевірки ефективності методу виконано серію чисельних експериментів по апроксимації тестових функцій многочленами і дробово-раціональними виразами. Аналіз отриманих результатів показав, що за допомогою ДЕ для більшості тестових функцій вдалося точніше визначити оптимальні вузли і отримати меншу похибку сегментного наближення, ніж за допомогою більш складних детерміністичних методів.

Проаналізовано також вплив основних параметрів налаштування алгоритму ДЕ (сили мутації, ймовірності схрещування, розміру популяції) на швидкість збіжності алгоритму та сформульовано рекомендації щодо вибору найкращих значень цих параметрів.

АНОТАЦІЯ

У роботі розглядається задача рівномірної сегментної апроксимації з вільними вузлами. Вона полягає у знаходженні оптимальних вузлів розбиття проміжку наближення на сегменти та визначенні похибки наближення для цього розбиття, яка є мінімальною для заданої кількості сегментів. Задача пошуку

оптимальних вузлів – це нелінійна задача багатовимірної оптимізації. Для її розв’язання пропонується застосувати алгоритм диференціальної еволюції. Він належить до групи еволюційних алгоритмів – нового класу стохастичних пошукових методів оптимізації, в яких моделюються базові процеси біологічної еволюції. У роботі описано метод побудови рівномірного сегментного наближення функції многочленами і дробово-раціональними виразами з оптимальними вузлами, які знаходяться за алгоритмом диференціальної еволюції. Наведено результати чисельних експериментів по апроксимації тестових функцій. Аналіз цих результатів показав, що за допомогою диференціальної еволюції для більшості тестових функцій вдалося точніше визначити оптимальні вузли і отримати меншу похибку сегментного наближення многочленами і дробово-раціональними виразами, ніж за допомогою більш складних детерміністичних методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наукова думка, 1989. 272 с.

2. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации. Компьютерная математика. 2009. № 1. С. 99–107.

3. Lee D-U, Luk W., Villasenor J., Cheung P.Y.K. Non-uniform segmentation for hardware function evaluation. Proc. Inter. Conf. on Field Programmable Logic and Applications, Lisbon, Portugal, Sept. 2003. P. 796–807.

4. Vakal L.P. Seeking optimal knots for segment approximation. Journal of Automation and Information Sciences. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68–75. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i11.60.

5. Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minmax approximation problem. Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6, N 4. P. 293–301.

6. Вершик А.М., Малоземов В.Н., Певный А.Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация. Сибирский математический журнал. 1975. Т. 16, № 5. С. 925–938.

7. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Под ред. В.Ф. Дем’янова и В.Н. Малоземова. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. 192 с.

8. Pavlidis T., Maika A.P. Uniform piecewise polynomial approximation with variable joints. Journal of Approximation Theory. 1974. Vol. 12. P. 61–69.

9. Kioustelidis J.B. Optimal segmented approximations. Computing. 1980. Vol. 24. P. 1–8.

10. Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. An algorithm for segment approximation. Numerische Mathematik. 1986. Vol. 48, N 4. P. 463–477.

11. Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots. Mathematics of Computation. 1989. Vol. 53, N 187. P. 235–247.

12. Вакал Л.П. Рівномірне кусково-поліноміальне наближення. Комп'ютерні засоби, мережі та системи. 2006. № 5. С. 53–59.

13. Wolters H.J. A Newton-type method for computing best segment approximation. Communications on pure and applied analysis. 2004. Vol. 3, N 1. P. 133–149.

14. Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53, N 5. P. 759–765. DOI: 10.1007/s10559-017-9978-7.

15. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. Journal of Global Optimization. 1997. Vol. 11. P. 341–359.

16. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.

17. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47, N 8. P. 52–62. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50.

18. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. Journal of Automation and Information Sciences. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.

19. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. 2017. Вип. 15. С. 24–30.

20. Вакал Л.П., Каленчук-Порханова А.О. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації. Математичні машини і системи. 2006. № 2. С. 15–24.

21. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 623 с.

22. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой. Искусственный интеллект. 2009. № 1. С. 158–165.

23. Вакал Л.П., Вакал Є.С., Довгий Б.П. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з використанням диференціальної еволюції. Computer Science and Applied Mathematics. 2021. № 1. С. 15–21. DOI: 10.26661/2413-6549-2021-1-02.

24. Попов Б., Лаушник О., Сущик К. Нелінійні апроксимаційні моделі. Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 5. С. 32–38.

Information about the authors:
Vakal Larysa Petrivna,
Candidate of Technical Sciences,
Senior Research Fellow
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine
40, Academician Glushkov Avenue, Kyiv, 03187, Ukraine

Vakal Yevhen Serhiiovych,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Phisics
Taras Shevchenko National University of Kyiv
60, Volodymyrska str., Kyiv, 01033, Ukraine