DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-2

ГЕОМЕТРІЯ ГРАССМАНОВОГО ОБРАЗУ НЕІЗОТРОПНОЇ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО

Гречнєва М. О., Стєганцева П. Г.

ВСТУП

У класичній диференціальній геометрії важливу роль відіграє гауссове сферичне відображення поверхонь. Найбільш природнім узагальненням цього поняття у багатовимірних просторах є грассманове відображення підмноговидів. При грассмановому відображенні кожній точці x підмноговиду F^p, зануреного в евклідів простір R_{l+p}, ставиться у відповідність l-площина, паралельна нормальній l-площині підмноговиду F^p в точці x і така, що проходить через фіксовану точку O простору R_{l+p}. Образ підмноговиду F^p називається його грассмановим образом. Вивченню грассманового образу й, у зв'язку з цим, дослідженню геометричних властивостей многовидів Грассмана останнім часом приділяється усе більше уваги. Серед задач, пов'язаних з вивченням грассманового образу поверхонь у евклідовому просторі, виділяються задачі класифікації точок поверхні; вивчення поверхонь із заданим значенням секційної кривини її грассманового образу, зокрема, з екстремальними значеннями секційної кривини; відновлення поверхні за її грассмановим образом, й інші. Багато із цих задач важливі як для самої геометрії так і для її додатків, серед яких можна вказати теорію диференціальних рівнянь у частинних похідних. Диференціальна геометрія грассманових многовидів та їх підмноговидів викладена, наприклад, в монографіях Амінова Ю.А.[1], Борисенка О.А.[2].

У просторі Мінковського також можна розглядати многовид Грассмана, який являє собою об'єднання підмноговидів просторовоподібних, часоподібних та ізотропних площин однієї розмірності. Оскільки в цьому просторі існують поверхні різних

---

[1] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

[2] Борисенко А.А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. Москва : Экзамен, 2003.

типів, то дослідження грассманового образу кожного типу поверхні є окремою змістовною задачею. Крім того, перераховані вище задачі майже не досліджені або недостатньо досліджені в просторі Мінковського, на відміну від евклідового простору.

1. Зв'язок геометрії двовимірної поверхні простору Мінковського з геометрією її грассманового образу

Многовидом Грассмана $G(2,4)$ (грассмановим многовидом) називається множина 2-площин 4-вимірного евклідового простору R_4, що проходять через початок координат. В просторі Мінковського $^1R_4$ (з метрикою $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$) множину двовимірних площин, що проходять через фіксовану точку *O*, за аналогією з евклідовим простором, називають грассмановим многовидом. Будемо його позначати $PG(2,4)$. У просторі $^1R_4$ кожна із цих площин є площиною певного типу: просторовоподібною, часоподібною або ізотропною, а многовид $PG(2,4)$ представляє собою діз'юнктне об'єднання трьох підмноговидів: $^SPG(2,4)$, $^TPG(2,4)$ та $^{Is}PG(2,4)$.

При стандартному плюккеровому вкладенні[3] грассманового многовиду $^SPG(2,4)$ метрика простору $^1R_4$ породжує в просторі бівекторів метрику простору $^3R_6$ – псевдоевклідового шестивимірного простору індекса 3. Підмноговиди просторовоподібних $^SPG(2,4)$ та часоподібних $^TPG(2,4)$ площин грассманового многовиду $PG(2,4)$ є псевдорімановими чотиривимірними многовидами цього простору, а дотичний простір до кожного з цих многовидів має метрику сигнатури $(--++)$[4].

Поверхня V^2 класу $C^k, k>1$ у просторі $^1R_4$ називається *просторовоподібною (часоподібною, ізотропною)*, якщо дотична площина до неї в кожній точці є просторовоподібною (часоподібною, ізотропною).

---

[3] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

[4] Гургенидзе М. А. О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства Збірник праць інституту математики НАН України. 2006. № 3. С. 107–114.

Будемо розглядати такі двовимірні поверхні простору ${}^1R_4$ або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини в кожній точці один і той самий. При грассмановому відображенні поверхні V^2 в грассманів многовид $PG(2,4)$ отримаємо *грассмановий образ* поверхні V^2. Грассмановий образ просторовоподібної (часоподібної) двовимірної поверхні простору ${}^1R_4$ є двовимірним підмноговидом (двовимірною поверхнею) многовиду часоподібних (просторовоподібних) площин, якщо індукована метрика грассманового образу є знаковизначеною або знаконевизначеною. Якщо ж індукована метрика є виродженою, то грассмановий образ є або ізотропною поверхнею або кривою. В цій роботі будемо розглядати лише невироджений грассмановий образ і позначати його символом Γ^2.

Якщо регулярну неізотропну поверхню V^2 класу $C^k, k > 2$ в ${}^1R_4$ задавати векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$, то вектори $\bar{r}_i = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$ будуть дотичними до поверхні і в кожній точці $x \in V^2$ однозначно визначається двовимірна нормальна площина N_x. Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальна площина в кожній точці до цієї поверхні буде часоподібною, якщо ж поверхня часоподібна, то нормальна площина – просторовоподібна.

Будемо вважати, що у точці $x \in V^2$ вектори $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ ортогональні. Виберемо в нормальній площині N_x лінійно незалежні одиничні вектори $\bar{\xi}_1$ й $\bar{\xi}_2$ так, щоб четвірка векторів $\bar{r}_1, \bar{r}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ була ортогональною в ${}^1R_4$. За допомогою кожного базисного вектора нормальної площини визначимо другу квадратичну форму

$$II^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij}) du^i du^j,\ k = 1, 2,$$

де i, j – індекси підсумовування. Коефіцієнти позначимо $L^k_{ij} = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij})$.

З розкладів Гаусса та Вейнгартена випливають рівняння Гаусса

$$Kg = -L^1_{11} L^1_{22} + (L^1_{12})^2 + L^2_{11} L^2_{22} - (L^2_{12})^2$$

для просторовоподібної поверхні та

$$Kg = -L^1_{11} L^1_{22} + (L^1_{12})^2 - L^2_{11} L^2_{22} + (L^2_{12})^2$$

для часоподібної поверхні, де K – гауссова кривина, $g = g_{11} g_{22} - g^2_{12}$.

Одним з важливих питань є дослідження властивостей кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу підмноговидів (секційної кривини). Вонг Ю.[5] встановив, що секційна кривина дійсного грассманового многовиду двовимірних площин чотиривимірного евклідового простору має точні границі $\bar{K}(\sigma) \in [0,2]$ й дав характеристику тих двовимірних напрямків σ, у яких $\bar{K}(\sigma)$ досягає граничних значень.

Виникає питання про значення секційної кривини грассманових підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ у випадку простору ${}^{1}R_4$. Відповідь на це питання дає наступна[6]

Теорема 1. Секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманових підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ простору ${}^{1}R_4$ може приймати будь-які дійсні значення.

Грассманів образ поверхні простору ${}^{1}R_4$, як і в евклідовому просторі, можна задавати за допомогою спеціальних координат $p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$, які називаються плюккеровими[7]. Вони визначаються формулою

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix}, \ i < j, \ i, j = 1, .., 4,$$

де $\bar{\xi}_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4)$, $\bar{\xi}_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4)$ – одиничні базисні вектори нормальної площини поверхні. Якщо в якості базису нормальної площини вибрати іншу пару векторів, то набір плюккерових координат цієї площини буде відрізнятись від попереднього множником, який дорівнює визначнику матриці переходу від одного базису до іншого. Плюккерові координати задовольняють співвідношення Плюккера

$$p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0,$$

а також співвідношення

$$-(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 = -1 \qquad (1)$$

для часоподібної площини і

$$-(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 = 1 \qquad (2)$$

для просторовоподібної площини.

---

[5] Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassman manifolds. Ibid. 1960. 60. P. 75-79.

[6] Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. Известия вузов. Математика. 2017, №2, С. 65-75.

[7] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

Розглянемо в просторі A_6 радіус-вектори $\overline{OM} = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$, кінці яких зображують у цьому просторі площини простору ${}^1R_4$. Ліва частина останніх двох рівностей є квадратичною формою. Асоційовану з нею білінійну форму будемо розглядати як визначення скалярного добутку векторів $\bar{p} = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$ і $\bar{q} = (q^{12}, q^{13}, q^{14}, q^{23}, q^{24}, q^{34})$, тобто

$$(\bar{p}, \bar{q}) = -(p^{12}q^{12} + p^{13}q^{13} + p^{14}q^{14}) + p^{23}q^{23} + p^{24}q^{24} + p^{34}q^{34}.$$

Цей крок рівносильний введенню в A_6 структури шестивимірного псевдоевклідового простору індексу 3, який будемо позначати ${}^3R_6$. Числа $p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$ є координатами в ${}^3R_6$ відносно ортонормованого базису з матрицею Грамма

$$E_6' = diag(-1,-1,-1,1,1,1).$$

Тоді ліві частини умов (1) і (2) являють собою квадрати вектора $\overline{OM}$ в метриці простору ${}^3R_6$[8]. Ці рівності означають, що вектор $\overline{OM}$ уявноодиничний і одиничний відповідно. Параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$ задають грассмановий образ поверхні, його називають точковим грассмановим образом.

2. Відновлення неізотропної поверхні простору Мінковського за заданим грассмановим образом

Однією із цікавих задач, пов'язаних з вивченням грассманового образу, є задача про відновлення поверхні за її грассмановим образом. Сформулювати її можна в такий спосіб: по заданому регулярному підмноговиду Γ^p, що лежить в $G(l, l+p)$, побудувати регулярний p-вимірний підмноговид V^p в R_{l+p}, що має Γ^p своїм грассмановим образом. Для двовимірних поверхонь ця задача вирішена Аміновим Ю. А. у роботах[9],[10],[11], де доведені теореми існування та єдиності поверхні довільної корозмірності, що має заданий грассмановий образ.

[8] Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. Москва : Наука, 1969. 547с.

[9] Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. Математический сборник. 1982. Т. 117. № 2. С. 147-160.

[10] Аминов Ю. А., Тарасова Т. С. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу. Укр. геом. сб. 1983. Вып. 26. С. 6-13.

[11] Аминов Ю.А. Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. Мат. заметки. 1984. Т. 36. № 2. С. 223-228.

Горькавий В. О. також розв'язує задачу відновлення підмноговиду евклідового простору за його грассмановим образом[12],[13],[14].

Аналогічну задачу у просторі Мінковського сформулюємо наступним чином: знайти регулярну поверхню V^2 простору Мінковського, грассмановим образом якої є задана регулярна поверхня $\Gamma^2 \subset PG(2,4)$.

Розв'язання цієї задачі пов'язане з класифікацією точок поверхні. Розглянемо так звану *грассманову* класифікацію точок поверхні. Цей термін пояснюється тим, що тип точок поверхні визначається типом точок грассманового образу цієї поверхні.

Припустимо, що існують області на поверхні V^2, точковий грассмановий образ яких має в усіх точках дотичні площини одного типу. Зауважимо, що тип грассманового образу може як співпадати з типом поверхні V^2, так і відрізнятися від нього.

Визначення 1. Точка x поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ називається *еліптичною* (*параболічною*, *гіперболічною*), якщо точка грассманового образу поверхні, що відповідає точці x, є еліптичною (параболічною, гіперболічною).

Визначення 2. Точка грассманового образу Γ^2 часоподібної поверхні V^2 називається *еліптичною* (*параболічною*, *гіперболічною*), якщо для площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^SPG(2,4)$ задовольняє умові $\bar{K}(\sigma) < 1$ ($\bar{K}(\sigma) = 1$, $\bar{K}(\sigma) > 1$).

Визначення 3. Точка грассманового образу Γ^2 просторовоподібної поверхні V^2 називається *еліптичною* (*параболічною*, *гіперболічною*), якщо для площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^TPG(2,4)$ задовольняє умові $\bar{K}(\sigma) > -1$ ($\bar{K}(\sigma) = -1$, $\bar{K}(\sigma) < -1$).

[12] Горькавый В. А. Восстановлении подмногообразия в евклидовом пространстве по вырожденному в линию грассманову образу. Математические заметки. 1996. № 5. С. 681-691.

[13] Горькавый В. А. Теорема редукции в проблеме восстановления подмногообразия в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу Математическая физика. Анализ. Геометрия. 1996. № 4. С. 309-333.

[14] Горькавый В. А. Восстановление специальных подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу. Математическая физика. Анализ. Геометрия. 2000. № 7. С. 131-152.

Будемо розглядати в якості грассманового образу ті двовимірні області грассманового многовиду, в яких усі точки належать одному типу (еліптичні, гіперболічні, параболічні) й тип точок області називати типом грассманового образу. Покажемо, що зв'язок між типом точки грассманового образу поверхні V^2 і секційною кривиною визначений коректно. Має місце

Теорема 2. Якщо існує часоподібна поверхня V^2 простору ${}^1R_4$, грассмановий образ якої є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ простору ${}^3R_6$, то кожна компонента радіус-вектора поверхні V^2 задовольняє одному диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних, тип якого збігається з типом грассманового образу (еліптичний, гіперболічний, параболічний).

Доведення. Поверхню $\Gamma^2 \in {}^S PG(2,4)$ простору ${}^3R_6$ задамо параметричними рівняннями $p^{ij} = p^{ij}(u^1,u^2), i, j = 1,...,4, i < j$. Параметричні рівняння шуканої поверхні V^2 простору ${}^1R_4$ мають вигляд $x_i = x_i(u^1,u^2)$.

Задача зводиться до розв'язання одного рівняння відносно невідомої функції x_2 – другої координати радіус-вектора шуканої поверхні. Якщо цю функцію позначити через Ψ, то рівняння буде мати вигляд

$$C\Psi_{u^1u^1} + (A - D)\Psi_{u^1u^2} - B\Psi_{u^2u^1} + \Psi_{u_1}(C_{u^1} + A_{u^2}) - \Psi_{u^2}(D_{u^1} + B_{u^2}) = 0, \quad (3)$$

отриманий в роботі[15]. Коефіцієнти рівняння (3) є гладкими функціями від плюкерових координат, що забезпечує існування його розв'язку.

Зауважимо, що рівняння (3), з якого може бути знайдена поверхня простору Мінковського за її грассмановим образом, збігається (з точністю до знаків у формулах для обчислення його коефіцієнтів) з рівнянням для знаходження поверхні евклідового простору за її грассмановим образом[16]

Тип рівняння (3) залежить від типу грассманового образу. А саме, якщо виконується умова $\bar{K}(\sigma) < 1$, то рівняння (3)

[15] Гречнева М. А., Стеганцева П.Г. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом. Украинский математический журнал. 2016. Т.68. №10. С. 1320-1329.

[16] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

еліптичного типу. Якщо $\bar{K}(\sigma) > 1$, то рівняння (3) гіперболічного типу, а якщо $\bar{K}(\sigma) = 1$ – параболічного типу.

Зауваження. У випадку, коли поверхня V^2 просторовоподібна і її грассмановий образ є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ простору ${}^{3}R_6$, то кожна компонента її радіус-вектора також задовольняє одному диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних, тип якого збігається з типом грассманового образу (еліптичний, гіперболічний, параболічний).

У разі гіперболічного типу рівняння (3) справедлива локальна теорема про існування околу точки на Γ^2, який є грассмановим образом деякої поверхні простору ${}^{1}R_4$.

Теорема 3. Нехай Γ^2 – двовимірна регулярна класу C^4 поверхня в ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$). Якщо кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$) для площини, дотичної до Γ^2 в точці P_0, задовольняє умові $\bar{K}(\sigma) > 1$ (або $\bar{K}(\sigma) < -1$), то існує окіл точки P_0, що є грассмановим образом регулярної класу C^2 поверхні V^2 простору ${}^{1}R_4$.

У випадку еліптичного типу рівняння (3) можна довести існування області на поверхні, що задовольняє теоремі Лаврентьєва[17].

Теорема 4. Нехай D – область на регулярній класу $C^{2,\alpha}$ поверхні Γ^2 в ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$), в кожній точці якої $\bar{K}(\sigma) < 1$ (або $\bar{K}(\sigma) > -1$). Нехай на границі області D задано три точки P_1, P_2, P_3, уся область D однозначно й регулярно проектується на деякий простір $T^3(\bar{e})$ ($\bar{e}$ – фіксований вектор в ${}^{1}R_4$) і опорна функція проекції не дорівнює нулю. Якщо Δ – однозв'язна область у двовимірній площині π простору ${}^{1}R_4$, яка проходить через $\bar{e}$, і Q_1, Q_2, Q_3 – точки на границі області Δ, то в просторі ${}^{1}R_4$ існує регулярна класу $C^{2,\alpha}$ поверхня, яка проектується на площину π в область Δ та має D своїм грассмановим образом і така, що точки, які проектуються в Q_i, мають своїми грассмановими образами точки P_i.

---

[17] Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Том 12. № 6. С. 513-554.

У роботі[18] Кізбікенова К.О. задача про відновлення двовимірних поверхонь чотиривимірного евклідового простору за заданим грассмановим образом розглядається в глобальному аспекті. Ним сформульовані й доведені теореми про існування й єдиність поверхні із заданим грассмановим образом. Тип диференціального рівняння для відновлення поверхні залежить від знака кривини грассманового образу уздовж однієї з нормалей. Для виводу цього рівняння автор будує спеціальний рухомий репер.

Аналогічну задачу було розглянуто для двовимірних неізотропних поверхонь простору Мінковського. Вона формулюється наступним чином.

Нехай задано поверхню Γ^2 в ${}^3R_6$ і регулярну криву l в ${}^1R_4$ Потрібно знайти таку поверхню V^2 в ${}^1R_4$, щоб її краєм була задана крива l, а її грассманів образ збігався з поверхнею Γ^2. В роботі[19] доведена теорема

Теорема 5. Нехай $\Gamma^2 \subset {}^SPG(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{yA + xB}{ak}, \frac{A}{ak}, \frac{x}{ak}, -\frac{B}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{1}{ak}\right),$$

де x, y – координати на півсфері S^2 одиничного радіуса, уведені вище. Нехай Ω – область на S^2, обмежена двома кривими, які є перетинами півсфери площинами, що проходять через її діаметр; Ω' – проекція області Ω на дотичну площину до S^2 в точці M. Функції $A(x,y)$, $B(x,y)$ є функціями класу C^2 в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'}\{|\, 4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2 \,|, |\, A_y \,|, |\, B_x \,|\} \geq n_0 = const > 0$$

і нехай на одній із кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\bar{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R_s^3 = -a_0R_s^1 - sR_s^2$,

[18] Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. ЛГПИ, Л. 1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. № 6568-83 ДЕП.

[19] Гречнева М. А., Стеганцева П. Г. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ. Proceedings of the International Geometry Center. 2018. Vol.11. № 1. pp. 27-38.

$R_s^4 = -A|_l\, R_s^1 + B|_l\, R_s^2$, $a_0 = const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна часоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 та край поверхні V^2 збігається із кривою $\bar{R} = \bar{R}(s)$.

Ця теорема є аналогом сформульованої та доведеної в роботі[20] теореми для двовимірної поверхні чотиривимірного евклідового простору. Доведення цієї теореми розбивається на два етапи. Спочатку доводиться існування розв'язку диференціального рівняння $A_y h_{xx} - \left(A_x + B_y\right) h_{xy} + B_x h_{yy} = 0$ при зазначених початкових умовах. У випадку евклідового простору Кізбікенов К.О використовує метод Шикіна Є.В. і для цього переходить до системи п'яти лінійних диференціальних рівнянь із п'ятьма невідомими функціями x, y, p, q, h, що залежать від параметрів u, v

$$\begin{cases} y_u - \rho_1 x_u = 0, \\ y_v - \rho_2 x_v = 0, \\ p_u + \rho_2 q_u = 0, \\ p_v + \rho_1 q_v = 0, \\ h_u - p x_u - q y_u = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де ρ_1, ρ_2 – корені характеристичного рівняння $A_y \rho^2 - \left(A_x + B_y\right)\rho + B_x = 0$, а $p = h_x$, $q = h_y$.

Систему перших двох рівнянь можна перетворити до рівносильної системи, до якої застосовується лема про існування єдиного розв'язку (x, y) у деякій смузі зміни параметрів u, v. Застосовуючи цю лему необхідну кількість раз, одержуємо висновок про існування розв'язку системи в смузі, що покриває Ω'. Функції p, q знаходяться таким самим чином із третього й четвертого рівнянь системи (4). З урахуванням останнього рівняння цієї системи знаходимо h. Поверхня відновлюється за функціями A, B і h.

У випадку простору Мінковського коефіцієнти рівняння $A_y h_{xx} - \left(A_x + B_y\right) h_{xy} + B_x h_{yy} = 0$ мають інший вигляд, що пояснюється метричними властивостями цього простору. Разом з тим, якщо вони задовольняють тим же вимогам, що й у випадку евклідового

---

[20] Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. ЛГПИ, Л. 1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. №6568-83 ДЕП

простору, то запропоноване в роботі[21] доведення теореми про відновлення поверхні евклідового простору по суті є доведенням теореми про відновлення поверхні простору Мінковського.

Для відновлення просторовопоібної поверхні має місце

Теорема 6. Нехай $\Gamma^2 \subset {}^T G(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{1}{ak}, \frac{x}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{A}{ak}, -\frac{B}{ak}, -\frac{yA+xB}{ak}\right),$$

де x, y – координати на півсфері сфери S^2 одиничного радіуса, введені вище. Нехай Ω – сферичний двокутник з вершинами на екваторі, що цілком лежить на півсфері, а Ω' – проекція Ω на дотичну площину до S^2. Функції $A(x,y)$, $B(x,y)$ є функціями класу C^2 в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'}\{|\,4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2\,|, |\,A_y\,|, |\,B_x\,|\} \geq n_0 = const > 0$$

і нехай на одній з кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\bar{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R_s^3 = -a_0R_s^1 - sR_s^2$, $R_s^4 = -A|_l\, R_s^1 + B|_l\, R_s^2$, $a_0 = const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна просторовоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 та край поверхні V^2 збігається з кривою $\bar{R} = \bar{R}(s)$.

3. Властивості поверхонь простору Мінковського, пов'язані з грассмановим образом

3.1. Дослідження властивостей секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні

Як зазначалось у розділі 1, Вонг Ю.[22] встановив точні границі секційної кривини дійсного грассманового многовиду двовимірних

[21] Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. ЛГПИ, Л. 1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. №6568-83 ДЕП

[22] Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassman manifolds. Ibid. 1960. 60. P. 75-79.

площин чотиривимірного евклідового простору: $\bar{K}(\sigma) \in [0, 2]$. Він також дав характеристику тих двовимірних напрямків σ, вздовж яких $\bar{K}(\sigma)$ досягає найменшого та найбільшого значень. Секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманових підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ простору ${}^{1}R_4$ може приймати будь-які дійсні значення (Теорема 1).

Змістовні результати дало дослідження поверхнонь евклідового простору, для яких кривина грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу (або просто кривина грасманового образу поверхонь), приймає мінімальне й максимальне значення.

В роботі[23] доведена теорема про те, що секційна кривина многовиду Грассмана евклідового простору E^{l+p} дорівнює нулю вздовж будь-якої двовимірної площини, дотичної до грассманового образу поверхні F^l тоді і тільки тоді, коли поверхня F^l є плоским многовидом в E^{l+p}, має плоску нормальну зв'язність та $p \geq l$. В роботі[24] досліджувалось питання про поверхні, для яких кривина многовиду Грассмана вздовж площин, дотичних до їх грассманового образу, максимальна і дорівнює 2 і доведено, що це виконується тільки для мінімальних поверхонь, еліпс нормальної кривини яких в кожній точці є колом з центром на поверхні.

Випадок поверхонь простору Мінковського суттєво відрізняється від евклідового. Оскільки секційна кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ може приймати будь-які дійсні значення, то розглядатимемо значення секційної кривини в точках локальних екстремумів. Робота[25] присвячена опису класів поверхонь V^2 простору ${}^{1}R_4$, для яких кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу Γ^2, приймає стаціонарні значення. Надамо основні положення цього дослідження.

Двовимірні дотичні площини σ до кожного з підмноговидів будемо задавати бівектором $\bar{\sigma}$ з координатами $\sigma^{ab} = x^{[a}y^{b]}$, де

---

[23] Muto Y. The Gauss map of submanifold in a Euclidean space J. Math. Soc. Japan.1978. 30, № 1. P. 85-100.

[24] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа. Математические заметки. 1990. Т.48, № 3.

[25] Гречнева М. А., Стеганцева П. Г. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманова образа. Proceedings of the International Geometry Center. 2016. Vol. 9. № 2. P. 42-48.

$\bar{X}=(x^a)$ й $\bar{Y}=(y^b)$, $a,b=1,..,4$ – дотичні вектори. Тоді секційна кривина в напрямку даної площини визначається формулою[26]

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{\bar{R}_{abcd}\sigma^{ab}\sigma^{cd}}{(a_{ac}a_{bd}-a_{ab}a_{cd})\sigma^{ab}\sigma^{cd}}\,, \tag{5}$$

де $\bar{R}_{abcd}$ – тензор кривини підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ або ${}^{S}PG(2,4)$.

Дотичні вектори до грассманового образу часоподібної поверхні $V^2\subset{}^{1}R_4$ відносно рухомого базису $\bar{r}_1=\sqrt{-g_{11}}\bar{e}_1$, $\bar{r}_2=\sqrt{g_{22}}\bar{e}_2$, $\bar{e}_3=\bar{\xi}_1, \bar{e}_4=\bar{\xi}_2$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{X}&=\frac{\partial\bar{p}}{\partial u^1}=\left(\frac{L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}}},-\frac{L_{11}^1}{\sqrt{-g_{11}}},\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}},-\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\\ \bar{Y}&=\frac{\partial\bar{p}}{\partial u^2}=\left(\frac{L_{12}^2}{\sqrt{-g_{11}}},-\frac{L_{12}^1}{\sqrt{-g_{11}}},\frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}},-\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

а бівектор $\bar{\sigma}$ буде мати координати

$$\sigma^{12}=\frac{L_{11}^1L_{12}^2-L_{12}^1L_{11}^2}{-g_{11}},\sigma^{13}=\frac{L_{11}^2L_{22}^2-(L_{12}^2)^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}},\sigma^{14}=\frac{L_{12}^1L_{12}^2-L_{22}^1L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}},$$

$$\sigma^{23}=\frac{L_{12}^1L_{12}^2-L_{11}^1L_{22}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}},\sigma^{24}=\frac{L_{11}^1L_{22}^1-(L_{12}^1)^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{34}=\frac{L_{12}^1L_{22}^2-L_{22}^1L_{12}^2}{g_{22}}. \tag{7}$$

У випадку просторовоподібної поверхні матимемо

$$\begin{aligned}\bar{X}&=\frac{\partial\bar{p}}{\partial u^1}=\left(-\frac{L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}},-\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}},\frac{L_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}},\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\\ \bar{Y}&=\frac{\partial\bar{p}}{\partial u^2}=\left(-\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}},-\frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}},\frac{L_{21}^1}{\sqrt{g_{11}}},\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

відносно рухомого базису $\bar{r}_1=\sqrt{g_{11}}\bar{e}_3$, $\bar{r}_2=\sqrt{g_{22}}\bar{e}_4$, $\bar{e}_1=\bar{\xi}_1, \bar{e}_2=\bar{\xi}_2$, а бівектор $\bar{\sigma}$ буде мати координати

$$\sigma^{12}=\frac{L_{11}^2L_{22}^2-(L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{13}=\frac{L_{11}^1L_{12}^2-L_{12}^1L_{11}^2}{g_{11}},\ \sigma^{14}=\frac{L_{12}^1L_{12}^2-L_{22}^1L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},$$

$$\sigma^{23}=\frac{L_{11}^1L_{22}^2-L_{12}^1L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{24}=\frac{L_{12}^1L_{22}^2-L_{22}^1L_{12}^2}{g_{22}},\ \sigma^{34}=\frac{L_{11}^1L_{22}^1-(L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \tag{9}$$

Формули секційної кривини для підмноговидів ${}^{S}PG(2,4)$ та ${}^{T}PG(2,4)$ набудуть відповідно вигляду

[26] Петров А. З. Пространства Эйнштейна Москва : Физматгиз, 1961. 463 с.

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 - (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2} \qquad (10)$$

та

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{-(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 + (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2}. \qquad (11)$$

Псевдоріманова метрика $(--++)$ грассманових підмноговидів ${}^S PG(2,4)$ та ${}^T PG(2,4)$ породжує в шестивимірному просторі бівекторів $\bar{\sigma}$ метрику сигнатури $(+----+)$. Тоді вирази у знаменниках останніх двох формул є скалярними квадратами бівектора $\bar{\sigma}$.

Формула (10) співпадає з формулою секційної кривини з роботи[27], а формула (11) має інший вигляд, що обумовлено відмінним від запропонованого в роботі вибором базису. Точки локальних екстремумів знаходяться з системи рівнянь $\frac{\partial \bar{K}(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} = 0$, яка для підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ дає такі стаціонарні точки і відповідні значення секційної кривини:

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\bar{K}(\sigma) = 0$;

2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\bar{K}(\sigma) = 1$;

3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\bar{K}(\sigma) = 1$,

а для підмноговиду ${}^T PG(2,4)$:

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\bar{K}(\sigma) = 0$;

2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\bar{K}(\sigma) = -1$;

3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\bar{K}(\sigma) = -1$.

Теорема 7. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або просторовоподібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли V^2 є плоским многовидом у просторі ${}^1R_4$ і має плоску нормальну зв'язність.

---

[27] Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевкидова пространства. Ученые записки Тартуского университета. 1974. Вып. 342. С. 76-82.

Теорема 8. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або просторовоподібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює 1 (або -1) тоді й тільки тоді, коли поверхня V^2 є гіперповерхнею деякого тривимірного підпростору простору ${}^1R_4$.

3.2. Поверхні з плоскою нормальною зв'язністю

Питання про будову двовимірних поверхонь, кривина грассманового образу яких приймає граничні значення (у випадку простору E^4) або стаціонарні значення (у випадку простору Мінковського) повністю розв'язані. Якщо ж розглядати окремі класи поверхонь, то можна поставити питання про границі кривини грассманового образу поверхонь, які належать тому чи іншому класу. Зупинимось тут лише на одному класі – поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю. Для поверхонь цього класу у евклідовому просторі кривина грассманового образу приймає значення з множини [0,1][28].

В роботі[29] вказано на те, що поняття нормальної зв'язності підмноговиду ріманового многовиду було введене Е. Картаном. Важливою властивістю поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю є існування координатної сітки, відносно якої першу та обидві другі квадратичні форми можна одночасно звести до діагонального виду. Ця координатна сітка є сіткою ліній кривини. Поверхні з плоскою нормальною зв'язністю та їх грассманові образи у просторі Мінковського мають ще додаткові властивості:

− Якщо грассмановий образ часоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ з плоскою нормальною зв'язністю невироджений, то він є часоподібною поверхнею;

− Невироджений грассмановий образ просторовоподібної поверхні може бути або просторовоподібною, або часоподібною, або ізотропною поверхнею;

[28] Аминов Ю.А. Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в (2n-1)-мерное евклидово пространство. Математический сборник. 1980. Т. 111. № 3. С. 402-433.

[29] Лумисте Ю.Г., Чекмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1981. № 12. С. 3–30.

− Тип невиродженого грассманового образу гіперповерхні V^2 деякого тривимірного підпростору простору ${}^1R_4$ співпадає з типом поверхні V^2.

Дослідимо, які значення приймає кривина грассманового образу поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю.

Теорема 9. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ є регулярною поверхнею з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом Γ^2. Тоді, якщо

1. V^2 – часоподібна, то $\bar{K}$ приймає значення з відрізку $[0,1]$;

2. V^2 – просторовоподібна і Γ^2 – просторовоподібний, то $\bar{K}$ приймає значення з $(-\infty,-1]$;

3. V^2 – просторовоподібна і Γ^2 – часоподібний, то $\bar{K}$ приймає значення з $[0,+\infty)$.

Доведення. 1. Часоподібна поверхня з плоскою нормальною зв'язністю має часоподібний грассманів образ $\Gamma^2 \subset {}^S PG(2,4)$. Оскільки ненульові координати бівектора $\bar{\sigma}$ мають вигляд $\sigma^{13} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}$, $\sigma^{14} = -\frac{L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}$, $\sigma^{23} = -\frac{L_{11}^1 L_{22}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$, $\sigma^{24} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}$, то за формулою (10)

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 + L_{11}^1 L_{22}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^2 L_{22}^1)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^1)^2}.$$

Очевидно, що $\bar{K}(\sigma) \geq 0$. Припустимо, що $\bar{K}(\sigma) > 1$. Тоді з (\ref{a10}) отримаємо нерівність $(L_{22}^1 L_{11}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 < 0$, яка є невірною. Отже, $\bar{K}(\sigma) \leq 1$. Остаточно, $\bar{K}(\sigma) \in [0,1]$.

2. Для просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю секційна кривина (11) буде дорівнювати

$$\bar{K}(\sigma) = -\frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 - L_{11}^1 L_{22}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2 - (L_{11}^2 L_{22}^1)^2 - (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^1)^2} \tag{12}$$

За умовою теореми грассманів образ є просторовоподібною поверхнею, тобто вираз у знаменнику додатний, тому $\bar{K}(\sigma) < 0$. З припущення, що $\bar{K}(\sigma) > -1$, отримаємо невірну нерівність $(L_{22}^1 L_{11}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 < 0$. Отже, секційна кривина може приймати значення з множини $(-\infty,-1]$.

3. Оскільки за умовою теореми грассманів образ є часоподібною поверхнею, то вираз у знаменнику формули (12) від'ємний, а значить

в цьому випадку $\bar{K}(\sigma) \geq 0$. Отже, для значень, які може приймати секційна кривина грассманового многовиду ${}^{T}PG(2,4)$ вздовж площин, дотичних до часоподібного грассманового образу просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю, отримаємо півінтервал $[0,+\infty)$. Теорема доведена.

3.3. Афінна та грассманова класифікації точок неізотропних поверхонь простору ${}^{1}R_{4}$

Питання про класифікацію точок многовиду є одним з основних у диференціальній геометрії занурених многовидів. Тип точки визначає вигляд околу цієї точки на многовиді. У диференціальній геометрії гіперповерхонь (поверхонь корозмірності один) це питання вирішується декількома способами: за числом асимптотичних напрямків у ній, за знаком і значенням головних кривин гіперповерхні, за допомогою гауссової кривини, за видом дотичного параболоїда. Важливо відзначити, що у випадку гіперповехонь всі ці способи дають однаковий результат.

Інша справа, коли корозмірність поверхні більша одиниці. У цьому випадку точки поверхні не завжди можна розбити на скінченне число класів. Ті випадки, коли таке розбиття можливе, описані в роботі[30]. Для двовимірної поверхні чотиривимірного евклідового простору в роботі[31] наведена афінна класифікація точок за видом дотичного параболоїда, у роботі[32] тип точки поверхні визначається типом відповідної точки її грассманового образу, також вказується на існування еквівалентності цих двох класифікацій.

Для поверхонь простору Мінковського грассманова класифікація точок була розглянута в розділі 2. Розглянемо також афінну класифікацію за видом дотичного параболоїда. Оскільки евклідів простір та простір Мінковського мають однакові афінні властивості, ми повинні отримати три класи точок. Опишемо особливості вибору систем координат для отримання рівнянь дотичних параболоїдів у випадку часоподібної та просторовоподібної поверхонь.

[30] Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей. Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 3. С. 17-29.

[31] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу. Укр. геом. сборник. 1989. Вып. 32. С. 11-27.

[32] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. – Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

Дві точки регулярної поверхні називаються *афінно еквівалентними*, якщо дотичні параболоїди в цих точках можна відобразити один на інший невиродженим афінним перетворенням в охопному просторі[33].

Виберемо систему координат у просторі ${}^1R_4$ так, щоб точка Q часоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ була початком координат, а дотичний простір $T_Q V^2$ був підпростором $\{x^1, x^2\}$. Тоді рівняння дотичного параболоїда з вершиною в точці Q будуть мати вигляд $x^{k+2} = L^k_{ij} x^j x^j$, де L^k_{ij} – коефіцієнти других квадратичних форм. Розглянемо в точці $x \in V^2$ пучок $A^1 - \lambda A^2$ других квадратичних форм. Тоді в залежності від виду елементарних дільників пучка рівняння дотичного параболоїда невиродженим афінним перетворенням простору ${}^1R_4$ зводиться до одного з наступних канонічних видів:

1) $x^3 = (x^1)^2$, $x^4 = (x^2)^2$ для випадку лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$;

2) $x^3 = 2x^1 x^2$, $x^4 = (x^2)^2$, якщо маємо один лінійний елементарний дільник кратності 2, тобто $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda_1 \in R$;

3) $x^3 = 2x^1 x^2$, $x^4 = (x^1)^2 - (x^2)^2$ для квадратичного елементарного дільника $\lambda^2 - 2\alpha\lambda_1 + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

У випадку просторовоподібної поверхні систему координат в просторі ${}^1R_4$ будемо обирати так, щоб дотичний простір $T_Q V^2$ співпадав з підпростором $\{x^3, x^4\}$. Тоді рівняння $x^k = L^k_{ij} x^{i+2} x^{j+2}$ дотичного параболоїда з вершиною в точці Q невиродженим афінним перетворенням простору ${}^1R_4$ зводяться до наступних канонічних видів:

1) $x^1 = (x^3)^2$, $x^2 = (x^4)^2$ для випадку лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$;

2) $x^1 = 2x^3 x^4$, $x^2 = (x^4)^2$, якщо маємо один лінійний елементарний дільник кратності 2, тобто $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda_1 \in R$;

3) $x^1 = 2x^3 x^4$, $x^2 = (x^3)^2 - (x^4)^2$ для квадратичного елементарного дільника $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

---

[33] Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей. Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 3. С. 17-29.

Нагадаємо, що грассманова класифікація точок поверхні теж визначила три типи точок. Природньо поставити питання про зв'язок між цими двома класифікаціями.

Розглянемо умови, при яких першому (другому, третьому) класу точок в афінній класифікації відповідають еліптичні (параболічні, гіперболічні) точки в грассмановій класифікації. В цьому випадку будемо говорити про еквівалентність афінної та грассманової класифікацій.

Теорема 10. Для часоподібної поверхні із просторовоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні.

Доведення. Афінна класифікація дає три класи точок поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$, кожен з яких визначається видом дотичного параболоїда. Оскільки дотичний параболоїд з вершиною в точці поверхні і сама поверхня мають в цій точці спільну дотичну площину, а значить і спільну нормальну площину, то для визначення типу точки x поверхні в грассмановій класифікації треба знайти значення секційної кривини грассманового многовиду уздовж площини, дотичної до грассманового образу дотичного параболоїда в точці, що відповідає точці $x \in V^2$.

Зауважимо, що не завжди є можливість користуватися канонічними рівняннями дотичного параболоїда. Це пояснюється тим, що система координат, відносно якої рівняння параболоїда має канонічний вигляд, може індукувати таку систему координат на грассмановому многовиді , відносно якої дотична площина до грассманового образу має вироджену метрику.

Розглянемо часоподібну поверхню $V^2 \subset {}^1R_4$ з пучком $A^1 - \lambda A^2$ других квадратичних форм. У випадку різних лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$ цього пучка матриці A^1, A^2 можна звести до вигляду

$$A^1 = \begin{pmatrix} l_1\lambda_1 & 0 \\ 0 & l_2\lambda_2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix},\ l_i = \pm 1 .$$

Тоді векторне рівняння дотичного параболоїда набуде вигляду

$$\bar{r}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, l_1\lambda_1(u^1)^2 + l_2\lambda_2(u^2)^2, l_1(u^1)^2 + l_2(u^2)^2) .$$

Згідно з (6) дотичні вектори до грассманового образу дотичного параболоїда запишуться у вигляді $\bar{X} = \left(\frac{2l_1}{\sqrt{-g_{11}}}, -\frac{2l_1\lambda_1}{\sqrt{-g_{11}}}, 0, 0 \right)$ й

$\bar{Y} = \left(0,\, 0,\, \dfrac{2l_2}{\sqrt{g_{22}}},\, -\dfrac{2l_1\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}}\right)$. Отже, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площини, визначеної векторами $\bar{X}$ і $\bar{Y}$, у відповідності до формули (10), буде дорівнювати $\bar{K}(\sigma) = \dfrac{(1+\lambda_1\lambda_2)^2}{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}$. Очевидно, що $\bar{K}(\sigma) < 1$ при будь-яких $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким чином, першому класу точок в афінній класифікації відповідають еліптичні точки в грассмановій класифікації.

Нехай тепер секційна кривина підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площини, дотичної до грассманового образу поверхні, задовольняє нерівність $\bar{K}(\sigma) < 1$, тобто

$$\frac{(-\sigma^{12}+\sigma^{34})^2 - (\sigma^{13}+\sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2} < 1\,,$$

причому вираз в знаменнику додатний, оскільки за умовою теореми грассманів образ просторовоподібний.

Останню нерівність, з урахуванням умови Плюккера, можна звести до вигляду $(\sigma^{14}+\sigma^{23})^2 < 4\sigma^{13}\sigma^{24}$. Отримаємо

$$(2L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 > 4(L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2)(L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2)\,.$$

Знак нерівності змінився на протилежний, оскільки для часоподібної поверхні $g_{11}g_{22} < 0$. Детермінант пучка других квадратичних форм

$$\left|A^1 - \lambda A^2\right| = \begin{vmatrix} L_{11}^1 - \lambda L_{11}^2 & L_{12}^1 - \lambda L_{12}^2 \\ L_{12}^1 - \lambda L_{12}^2 & L_{22}^1 - \lambda L_{22}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 (L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2) + \lambda(2L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2) + (L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2)$$

представляє собою квадратний тричлен відносно λ. Тоді умова (3.34) буде означати, що дискримінант цього квадратного тричлена більше нуля, тобто пучок других квадратичних форм має два різні лінійні елементарні дільники.

Другому класу точок в афінній класифікації відповідають параболічні точки в грассмановій класифікації. Дійсно, в цьому випадку матриці других квадратичних форм можна звести до вигляду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & l_1\lambda_1 \\ l_1\lambda_1 & l_1 \end{pmatrix},\; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & l_1 \\ l_1 & 0 \end{pmatrix},\; l_i = \pm 1\,,$$

а рівняння дотичного параболоїда має вигляд

$$\bar{r}(u^1, u^2) = (u^1,\, u^2,\, 2l_1\lambda_1 u^1 u^2 + l_1 (u^2)^2,\, 2l_1 u^1 u^2)\,.$$

Секційноа кривина уздовж площини, дотичної до грассманового образу параболоїда, дорівнює одиниці. Це значення досягається тоді й тільки тоді, коли дискримінант детермінанта пучка других квадратичних форм дорівнює нулю.

Точки третього класу в афінній класифікації відповідають гіперболічним точкам у грассмановій класифікації. Оскільки у випадку квадратичного елементарного дільника матриці других квадратичних форм зводяться до вигляду

$$A^1 = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -\alpha+\beta \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \beta \neq 0,$$

то рівняння дотичного параболоїда запишеться у вигляді

$$\bar{r}(u^1,u^2) = (u^1, u^2, (\alpha-\beta)(u^1)^2 + 2(\alpha+\beta)u^1u^2 + (-\alpha+\beta)(u^2)^2, (u^1)^2 + 2u^1u^2 - (u^2)^2)$$

Формула для обчислення секційної кривини уздовж площини, дотичної до грассманового образу цього параболоїда, набуде вигляду

$\bar{K}(\sigma) = 1 + \dfrac{4\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2}$. Очевидно, що $\bar{K}(\sigma) > 1$.

Обернено, з того, що точка гіперболічна, випливає, що дискримінант детермінанта пучка других квадратичних форм менше нуля, тобто пучок має квадратичний елементарний дільник. Еквівалентність доведена.

Теорема 11. Для просторовоподібної поверхні з часоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні[34].

ВИСНОВКИ

В роботі було досліджено геометрії двовимірних неізотропних поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів. Доведена теорема про необмеженість секційної кривини грассманового многовиду двовимірних площин простору Мінковського. Знайдено границі значень кривини грассманового образу неізотропних поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю. Виділені класи неізотропних поверхонь зі стаціонарними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Отримані афінна класифікація точок неізотропної поверхні та класифікація точок поверхні в залежності від значень секційної кривини грассманового

[34] Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского. Proceedings of the International Geometry Center. 2017. Vol. 10, № 1. P. 59-66.

многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Знайдено умови еквівалентності цих класифікацій. Сформульовані й доведені теореми про необхідні й достатні умови існування околу точки на Γ^2, який є грассмановим образом деякої неізотропної поверхні простору ${}^1R_4$. Доведені теореми існування поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена дослідженню зв'язків між диференціальними геометріями поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів і використанню цих зв'язків для вивчення поверхонь. Виділені класи поверхонь простору Мінковського, для яких кривина грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу, приймає стаціонарні значення. Знайдено границі кривини грассманового образу поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю. Отримані афінна та грассманова класифікації точок неізотропної поверхні та знайдено умови еквівалентності цих класифікацій. Розв'язана задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом. Описано процедуру відновлення поверхні, грассманів образ якої співпадає з заданою двовимірною поверхнею на грассмановому многовиді. Доведені теореми існування поверхні з краєм, що має заданий грассмановий образ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Изометрические погружения областей *n*-мерного пространства Лобачевского в (2n-1)-мерное евклидово пространство. Математический сборник. 1980. Т. 111. № 3. С. 402–433

2. Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. Математический сборник. 1982. Т. 117. № 2. С. 147–160.

3. Аминов Ю. А., Тарасова Т. С. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу. *Укр. геом. сб.* 1983. Вып. 26. С. 6–13.

4. Аминов Ю.А. Восстановление двумерной поверхности в *n*-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. *Мат. заметки.* 1984. Т. 36. № 2. С. 223–228.

5. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев : Наукова думка, 2002. 467 с.

6. Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей. *Сибирский математический журнал.* 1990. Т. 31. № 3. С. 17–29.

7. Борисенко А.А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. Москва : Экзамен, 2003.

8. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу. *Укр. геом. сборник.* 1989. Вып. 32. С. 11–27.

9. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа. *Математические заметки.* 1990. Т. 48, № 3.

10. Горькавый В. А. Восстановлении подмногообразия в евклидовом пространстве по вырожденному в линию грассманову образу. *Математические заметки.* 1996. № 5. С. 681–691.

11. Горькавый В. А. Теорема редукции в проблеме восстановления подмногообразия в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу. *Математическая физика. Анализ. Геометрия.* 1996. № 4. С. 309–333.

12. Горькавый В. А. Восстановление специальных подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу. *Математическая физика. Анализ. Геометрия.* 2000. № 7. С. 131–152.

13. Гречнева М. А., Стеганцева П.Г. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом. *Украинский математический журнал.* 2016. Т. 68. № 10. С. 1320–1329.

14. Гречнева М. А., Стеганцева П. Г. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманова образа. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2016. Vol. 9. № 2. pp. 42–48.

15. Гречнева М. А., Стеганцева П. Г. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2018. Vol.11. № 1. pp. 27–38

16. Гургенидзе М. А. О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства. *Збірник праць інституту математики НАН України.* 2006. № 3. С. 107–114.

17. Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. ЛГПИ, Л. 1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. № 6568-83 ДЕП.

18. Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Том 12. № 6. С. 513–554.

19. Лумисте Ю.Г., Чекмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.* 1981. № 12. С. 3–30.

20. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевкидова пространства. *Ученые записки Тартуского университета.* 1974. Вып. 342. С. 76–82.

21. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Москва : Физматгиз, 1961. 463 с.

22. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. Москва : Наука, 1969. 547с.

23. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известия вузов. Математика.* 2017, № 2, С. 65–75.

24. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2017. Vol. 10, № 1. P. 59–66.

25. Muto Y. The Gauss map of submanifold in a Euclidean space J. Math. Soc. Japan.1978. 30, №1. P. 85–100.

26. Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassman manifolds. Ibid. 1960. 60. P. 75–79.

Information about the authors:
Grechneva Maryna Oleksandrivna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
66, Zhukovsky str., Zaporizhzhia, 69002, Ukraine

Stegantseva Polina Georgiivna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
66, Zhukovsky str., Zaporizhzhia, 69002, Ukraine