DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-4

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ У ВИГЛЯДІ СУМИ З ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Колун Н. П.

ВСТУП

Дослідження істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку займають важливе місце в розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Такого типу рівняння виникають у багатьох галузях природознавства. Наприклад, у другій половині XIX століття в астрофізичних дослідженнях J. Lein і R. Emden вперше з'явилося рівняння, яке в подальшому отримало назву Емдена − Фаулера. Це рівняння зіграло важливу роль у подальшому розвитку теорії нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Виявлення багатьох типів розв'язків у рівняння Емдена − Фаулера привело дослідників до вивчення асимптотичних властивостей узагальнених рівнянь типу Емдена − Фаулера другого порядку, а потім до вивчення асимптотичних властивостей узагальнених двочленних рівнянь типу Емдена − Фаулера n-го порядку та неавтономних рівнянь n-го порядку загального виду. Основні результати про поведінку розв'язків таких рівнянь були отримані в роботах R. Emden, R. H. Fowler, F. V. Atkinson, І. Т. Кігурадзе, Т. А. Чантурія, І. В. Асташової, S. Belohorec, М. О. Ясни, C. V. Coffman, J. S. W. Wong, В. А. Кондратьєва, О. В. Костіна, В. М. Євтухова та багатьох інших авторів[1] і відображені в монографії І. Т. Кігурадзе та Т. А. Чантурія

[1] Ascoli G. Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine. Rend. R. Ist. Lombardo Sc. Lettere. 1936. V.69. P.167–197.

Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations. Pasif. J. Math. 1955. V. 5, № 1. P. 643–647.

Belohorec S. Neoscilatorcke riesenia istej nelinearnej differensialnej rovnice druheho radu. Mat. Fuz. Cas. 1962. V. 12, № 4. P. 253–262.

Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

Borel E. Memoir sur les series divergentes. Annales de L'ecole Normale Superiere. 1899. V. 16. P. 9–136.

Coffman C.V., Wong J.S.W. On a second order nonlinear oscillation problem. Trans. Amer. Math Soc. 1970. V. 147, № 2. P. 357–366.

Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. Quart. J. Pure Appl. Math. 1914. V. 45. P. 289–350.

Hardy G.H. Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 1912. V. (2) 10. P. 451–468.

Kiguradze I.T. On the non-negative non-increasing solutions of nonlinear second order differential equations. Ann. Math. pur. ed. apple. 1969. V. 81. P. 169–192.

Kiguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. Arch. Math. (Brno). 1978. V. 14, № 1. P. 21–44.

Kiguradze I.T. On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation. Qual. Theory Differ. Equations. Amsterdam e. a. 1981. V. 1. P. 507–554.

Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G. On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations. Ann. Math. pura ed appl. 1982. V. 130. P. 67–87.

Lindelef E. Sur la croissance des integrales des equations differentielles algebriques du premier ordre. Bull.Soc.Math. France. 1899. V. 27. P. 205–215.

Maric V., Tomic M. Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$. Math. Z. 1976. 149. P. 161–166.

Maric V.,Tomic M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations. Publ. Inst. Math. 1977. V. 21, № 5. P. 119–129.

Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

Polvani G., Ascoli G., Giacomini A. Questioni riguardanti il magnetron. Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. 1936. V. 10. P. 279–338.

Taliaferro S.D. On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$. Nonlinear anal. 1978. V. 3. P. 437–444.

Taliaferro S.D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$. SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 853–865.

Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Пер. с англ. А.Д. Мышкиса. М. : Изд-во иностр. лит. 1954. 216 с.

Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. 295 с.

Изюмова Д.В. Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 1966. Т. 11, № 12. С. 1572–1586.

Клоков Ю.А. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1958. Т. 80, № 2. С. 189–194.

«Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь»[2], у якій, зокрема, були підбиті підсумки у напрямку дослідження асимптотичних властивостей розв'язків узагальнених рівнянь типу Емдена − Фаулера другого та n-го порядків.

Поряд із двучленними рівняннями типу Емдена − Фаулера почали досліджуватись також асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь другого та вищих порядків, що містять у правій частині суми доданків зі степеневими нелінійностями. Вперше з таким видом рівнянь зіткнулися при дослідженні рівняння Польвані[3], яке описує залежність від часу радіус-вектора електрону під час руху під дією магнітного поля. Повне дослідження цього рівняння було проведено G. Askoli[4]. Далі, в роботах Л. А. Беклемішевої[5] була досліджена асимптотика розв'язків диференціального рівняння другого порядку, що містить у правій частині суму доданків зі степеневими нелінійностями.

Разом з розвитком створеної у 1930 році I. Karamata теорії правильно змінних функцій[6], стала актуальною задача про дослідження асимптотичної поведінки розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінною нелінійністю. Такому виду рівнянь присвячені роботи V. Marić, M. Tomić, S. D. Taliaferro, В. М. Євтухова, Л. А. Кирилової[7].

---

[2] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука. 1990. 430 с.

[3] Polvani G., Ascoli G., Giacomini A. Questioni riguardanti il magnetron. Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. 1936. V. 10. P. 279–338.

[4] Ascoli G. Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine. Rend. R. Ist. Lombardo Sc. Lettere. 1936. V.69. P. 167–197.

[5] Беклемишева Л.А. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 2. С. 261–264.

Беклемишева Л.А. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, близких к каноническим. Вестник МГУ. 1960. Т. 4. С. 26–36.

Беклемишева Л.А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Мат. сб. 1962. Т. 56(98), № 2. С. 207–236.

[6] Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. Math. (Cluj) 1930. V. 4. P. 38–53.

[7] Maric V., Tomic M. Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$. Math. Z. 1976. 149. P. 161–166.

Maric V.,Tomic M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations. Publ. Inst. Math. 1977. V. 21, № 5. P. 119–129.

Найбільш важливі результати для такого виду рівнянь n-го порядку були отримані в роботі А. М. Самойленка та В. М. Євтухова[8]. У цей же період досліджувалися також диференціальні рівняння, що містять у правій частині суми доданків з правильно змінними нелінійностями, яким присвячені роботи В. М. Євтухова, В. А. Касьянової, О. М. Клопота[9]. Окрім того, в роботах V. Maric,

---

Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

Taliaferro S.D. On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$. Nonlinear anal. 1978. V. 3. P. 437–444.

Taliaferro S.D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$. SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 853–865.

Евтухов В.М. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Докл. АН СССР. 1977. Т. 233., № 4. С. 531–534.

Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Дифференциальніе уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1980. – 154 с.

Евтухов В.М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 473–476.

Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. 295 с.

Евтухов В.М., Васильева Н.С. Условия колеблемости и неколеблемости решений одного класса полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Укр. Мат. Ж. 2007. Т. 59, № 4. С. 458–466.

Евтухов В.М., Дрик Н.Г. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 133, № 1. С. 29–32.

Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0256-5

Кириллова Л.А. Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена-Фаулера : дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2006. 147 с.

[8] Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611105003X

[9] Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго

В. М. Євтухова, В. М. Харькова й А. Г. Черникової[10] досліджувались двочленні диференціальні рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю[11].

Враховуючи вищесказане, цілком логічно було б дослідити асимптотичну поведінку розв'язків диференціального рівняння другого порядку, що містить у правій частині суму доданків як з

порядка. I. Укр. Мат. журнал. 2005. Т. 57, № 3. С. 338–355. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-006-0120-7

Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II. Укр. Мат. журнал. 2006. Т. 58, №7. С. 901–921. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-005-0199-2

Касьянова В.А. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Вісник Чернівецького університету. 2004. Вип. 228, Математика. С. 15–29.

Клопот А.М. Асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями : дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2015. 148 с.

[10] Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2016. Т. 19, № 4. С. 458–475.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2017. Т. 20, № 3. С. 346–360.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, №10. С. 1345–1363.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2019. Т. 71, № 1. С. 73–91.

Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных уравнений второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2009. 139 с.

Черникова А. Г. Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. 2015. Т. 20, № 2. С. 56–68.

[11] Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

правильно, так і зі швидко змінними нелінійностями, тобто диференціальне рівняння, яке містить у правій частині суму доданків із різними нелінійностями. Дослідженням асимптотичних властивостей розв'язків такого виду рівнянь присвячена ця робота.

1. Теорія правильно та швидко змінних функцій

У цьому параграфі сформулюємо основні означення та теореми з теорії правильно та швидко змінних функцій, які знадобляться у подальшому для формулювання основних результатів роботи.

Надалі будемо вважати, що Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, і Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0.

Означення 1.1. Вимірна функція $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ називається правильно змінною при $y \to Y_0$, якщо існує таке число $\sigma \in \mathbb{R}$, що для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \epsilon Y_0}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^{\sigma}.$$

При цьому σ називається порядком функції φ (або показником).

Означення 1.2. Вимірна функція $L\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ називається повільно змінною при $y \to Y_0$, якщо для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \epsilon Y_0}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1.$$

Наприклад, функції $\ln |y|$, $\ln |\ln |y||$ і т. д. та функції, що мають відмінну від нуля границю при $y \to Y_0$, є повільно змінними при $y \to Y_0$.

З означень 1.1 1.2 випливає, що кожна правильно змінна при $y \to Y_0$ функція може бути зображена у вигляді добутку степеневої функції та повільно змінної при $y \to Y_0$ функції. Зважаючи на таке зображення, зрозуміло, що для того, щоб оперувати правильно змінними функціями, достатньо знати властивості повільно змінних при $y \to Y_0$ функцій. Відзначимо основні властивості повільно змінних функцій..

Теорема 1.1. (про рівномірну збіжність) Якщо $L\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ повільно змінна при $y \to Y_0$ функція, то граничне співвідношення

$$lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \epsilon Y_0}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1$$

виконується рівномірно за λ на будь-якому проміжку $[c,d] \subseteq]0,+\infty[$.

Теорема 1.2. (про зображення) Вимірна функція $L\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ є повільно змінною при $y \to Y_0$ тоді та лише тоді, коли для деякого $b \in \Delta_{Y_0}$ вона може бути зображена у вигляді

$$L(y) = c(y) exp \left\{ \int_b^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}$$

при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, де c – вимірна на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$ функція така, що $c(y) \to c_0 \in]0,+\infty[$ при $y \to Y_0$, ε – неперервна на $\Delta_{Y_0}(b)$, функція, що прямує до нуля при $y \to Y_0$, $\Delta_{Y_0}(b)$ – проміжок $]Y_0, b]$, якщо Δ_{Y_0} – правий окіл Y_0, і проміжок $[b, Y_0[$, якщо Δ_{Y_0} – лівий окіл Y_0.

Зауваження 1.1. Із теореми 1.2 при $c(y) = c_0$ випливає, що існує неперервно диференційовна повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L_0\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ така, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y \epsilon Y_0}} \frac{L(y)}{L_0(y)} = 1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y \epsilon Y_0}} \frac{y{L'}_0(y)}{L_0(y)} = 0.$$

Теорема 1.3. Якщо $L, L_1, L_2\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ – повільно змінні при $y \to Y_0$ функції, то $L_1(y) + L_2(y)$, $L_1(y)L_2(y)$, $L_1(L_2(y))$ (якщо $L_2(y) \to Y_0$ при $y \to Y_0$) є повільно змінними функціями.

Означення 1.3. Додатна та вимірна на проміжку $[a,+\infty[$ (на проміжку $]-\infty, a]$ функція φ називається швидко змінною при $y \to +\infty$ (при $y \to -\infty$) порядку $+\infty$ (порядку $-\infty$) , якщо при $y \to +\infty$ (при $y \to -\infty$)

$$\frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} \to \begin{cases} +\infty \text{ при } \lambda > 1\ (0 < \lambda < 1) \\ 0 \text{ при } 0 < \lambda < 1\ (\lambda > 1) \end{cases}.$$

Означення 1.4. Додатна та вимірна в однобічному околі нуля функція φ називається швидко змінною при $y \to Y_0$ порядку $+\infty$ (порядку $-\infty$), якщо $\frac{1}{\varphi(y)}$ – швидко змінна функція порядку $-\infty$ (порядку $+\infty$) на нескінченності.

Наприклад, функція e^y є швидко змінною при $y \to +\infty$, а e^{-y} є швидко змінною функцією при $y \to -\infty$.

З доведенням сформульованих у цьому параграфі тверджень та з більш детальною теорією правильно та швидко змінних функцій можна ознайомитись у роботі Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.[12] та в монографії Є. Сенети[13].

---

[12] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

[13] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. И.С. Шиганова, под редакцией В.М. Золотарева. М. : Наука. 1985.144 с.

2. Огляд досліджень асимптотичної поведінки розв’язків диференціальних рівнянь, що містять суми доданків з правильно змінними або швидко змінними нелінійностями

Перші вагомі результати про асимптотичну поведінку розв’язків диференціальних рівнянь, що містять суми доданків зі степеневими нелінійностями, отримані в 1899 році в дослідженнях Є. Бореля[14] та Є. Ліндельофа[15], в яких розглядалося диференціальне рівняння виду

$$\sum_{l+m+n=0}^{N} a_{lmn} t^{l} u^{m} (u')^{n} = 0.$$

Для цього рівняння були отримані оцінки так званих правильних розв’язків, тобто оцінки таких розв’язків, які визначені на додатньому проміжку та є неперервно диференційовними функціями на цьому проміжку.

У 1912 році була опублікована робота Г. Харді[16], в якій був розроблений метод встановлення асимптотичних зображень визначених в околі $+\infty$ розв’язків диференціального рівняння першого порядку виду

$$u' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)}$$

де P і Q це многочлени відносно t і u. Г. Харді отримав асимптотичні зображення для розв’язків таких диференціальних рівнянь.

За допомогою методики, яка розроблена Г. Харді при дослідженні вказаного рівняння, вдалося отримати доволі значущі результати для диференціального рівняння, яке свого часу досліджували Є. Борель та Є. Ліндельоф.

У 1914 році Р. Фаулер[17] зробив спробу поширити отримані результати Г. Харді на диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$u'' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)},$$

[14] Borel E. Memoir sur les series divergentes. Annales de L’ecole Normale Superiere. 1899. V. 16. P. 9–136.

[15] Lindelef E. Sur la croissance des integrales des equations differentielles algebriques du premier ordre. Bull.Soc.Math. France. 1899. V. 27. P. 205–215.

[16] Hardy G.H. Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 1912. V. (2) 10. P. 451–468.

[17] Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. Quart. J. Pure Appl. Math. 1914. V. 45. P. 289–350.

де P і Q це многочлени відносно t і u, однак отримати подібних результатів не вдалося. Досліджуючи це диференціальне рівняння, Р. Фаулер спирався на раніше отримані результати для двочленного диференціального рівняння

$$y'' = \pm t^{\gamma} y^{\sigma},$$

в якому $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma > 1.$ Це диференціальне рівняння називають рівнянням Емдена-Фаулера. Вперше воно виникло в дослідженнях Ж. Лейна, які присвячені вивченню динаміки газів. Частинні випадки рівняння Емдена-Фаулера виникають у різних галузях природознавства.

Актуальним у 1934 році стає питання про асимптотичні властивості диференціального рівняння, яке описує рух електорону в циліндричному діоді, що знаходиться в поздовжньому магнітному полі, а саме диференціальне рівняння виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 r}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3},$$

в якому аргумент t – час, функція r – радіус-вектор електорону, λ – додатній параметр. Це рівняння називають рівнянням Польвані[18]. Г. Асколі встановив, що

кожний розв'язок рівняння Польвані визначений на всій прямій, знайшов асимптотичні зображення для кожного додатнього особливого розв'язку та окремо знайшов асимптотичні зображення для кожного додатнього неособливого розв'язку рівняння Польвані.

В роботах Л.А. Беклемішевої[19] для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} b_i t^{n_i} y^{\sigma_i} \, [1 + o(1)],$$

в якому b_i, m_i – дійсні числа, а $\sigma_i > 0$ – раціональне число з непарним знаменником, на основі багатокутника Ньютона розроблена методика за допомогою якої були отримані асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення всіх правильних розв'язків цього

[18] Polvani G., Ascoli G., Giacomini A. Questioni riguardanti il magnetron. Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. 1936. V. 10. P. 279–338.

[19] Беклемишева Л.А. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 2. С. 261–264.

Беклемишева Л.А. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, близких к каноническим. Вестник МГУ. 1960. Т. 4. С. 26–36.

Беклемишева Л.А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Мат. сб. 1962. Т. 56(98), № 2. С. 207–236.

диференціального рівняння. Однак, запропонована Л.А. Беклемішевою методика може бути застосована лише у випадку, коли коефіцієнти є степеневими функціями.

Випадок, коли коефіцієнти є функціями відмінними від степеневих, вперше був розглянений О.В. Костіним[20]. О.В. Костін описав асимптотичну поведінку правильних розв'язків рівняння

$$P(t,u,u') = \sum_{i+k=1}^{n_1} p_{ik}(t) u^i u'^k = 0,$$

в якому $p_{ik}: [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовні функції, які разом зі своїми похідними першого порядку задовольняють певні додаткові співвідношення. Були встановлені умови при яких кожний правильний розв'язок u_0 цього диференціального рівняння або, починаючи з певного моменту, стає тотожньо сталою величиною, або знайдеться хоча б одна четвірка номерів $i, k, j, m,$ що задовольняють умову $(i-j)^2 + (k-m)^2 < 0$, для яких

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p_{ik}(t) u_0^i(t) {u'_0}^k(t)}{p_{jm}(t) u_0^j(t) {u'_0}^m(t)} = cons < 0.$$

В припущенні, що виконуються вищевказані умови, були отримані асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення всіх правильних розв'язків цього диференціального рівняння та вирішено питання про кількість таких розв'язків.

Оскільки суть запропонованої О.В. Костіним методики дослідження диференціальних рівнянь, що містять у правій частині суми доданків зі степеневими нелінійностями, полягає у зведенні цих диференціальних рівнянь до двочленних, то доцільно детальніше зупинитися на огляді їх досліджень.

Отримані результати для рівняння Емдена-Фаулера пробудили інтерес до рівняння більш загального виду, а саме до узагальненого рівняння Емдена-Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma sign y,$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1,1\}, p: [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\sigma < 1$.

[20] Костин А.В. О поведении при x → +∞ решений обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами. Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 2. С. 206– 218.

Костин А.В. Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена–Фаулера. Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 28–31.

Костин А.В., Евтухов В.М. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения. Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 5. С. 1059–1062.

Перші серйозні результати для цього рівняння були опубліковані в 1955 році в роботі Ф.В. Аткінсона[21], в якій при $\alpha_0 = -1$ і $\sigma > 1$ встановлено критерій коливності всіх правильних розв'язків рівняння Емдена-Фаулера. І.Т. Кігурадзе[22] розробив методику встановлення асимптотики правильних неколивних розв'язків цього диференціального рівняння при $\sigma > 1$. Пізніше в роботі Т.А. Чантурія[23] були отримані аналогічні результати для випадку $0 < \sigma < 1$.

Запропонована О.В. Костіним методика встановлення асимптотичної поведінки правильних неколивних розв'язків рівняння Емдена-Фаулера у випадку $\sigma > 1$, яка відрізняється від запропонованої методики І.Т. Кігурадзе, дозволила в роботах О.В. Костіна, В.М. Євтухова і В.М. Євтухова дослідити в рамках єдиного підходу правильні та різні типи сингулярних розв'язків диференціального рівняння

[21] Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations. Pasif. J. Math. 1955. V. 5, № 1. P. 643–647.

[22] Kiguradze I.T. On the non-negative non-increasing solutions of nonlinear second order differential equations. Ann. Math. pur. ed. apple. 1969. V. 81. P. 169–192.

Kiguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. Arch. Math. (Brno). 1978. V. 14, № 1. P. 21–44.

Kiguradze I.T. On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation. Qual. Theory Differ. Equations. Amsterdam e. a. 1981. V. 1. P. 507–554.

Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G. On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations. Ann. Math. pura ed appl. 1982. V. 130. P. 67–87.

Квиникадзе Г.Г., Кигурадзе И.Т. О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 465–468.

Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 1. С. 33–36.

Кигурадзе И.Т. Заметка об ограниченности решений дифференциальных уравнений. Тр. Тбилис. ун-та. 1965. Т. 110. С. 103–108.

Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Докл. АНСССР. 1968. Т. 181, № 5. С. 1054–1057.

Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Изв. АНСССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1373–1398.

Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та. 1975. 372 с.

[23] Чантурия Т.А. О неколеблющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН Грузии. 1969. Т. 55, № 1. С. 17–20.

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma}|y'|^{\lambda} signy,$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1,1\}$ $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}, p: [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega < +\infty$.

І.Т. Кігурадзе запропонував розбити всі можливі правильні та різні типи сингулярних розв'язків на класи та досліджувати умови існування й асимптотичну поведінку кожного класу окремо. Такий підхід дозволив у монографії І.Т. Кігурадзе та А.Т. Чантурія дослідити коливні, сингулярні, швидко змінні та кнезерівські розв'язки диференціального рівняння n-го порядку загального виду

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Більш загальний клас монотонних розв'язків був запроваджений В.М. Євтуховим[24] при дослідженні узагальненого рівняння Емдена-Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y|^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \left|y^{(n-1)}\right|^{\sigma_{n-1}} signy,$$

де $n \leq 2$, $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ – дійсні числа, сума яких менша за одиницю, $p: [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega < +\infty)$ – неперервна функція.

Використовуючи запропоновану А.В. Костіним методику дослідження рівняння Емдена-Фаулера, В.М. Євтухов і Є.В. Шебаніна25, розглянули диференціальне рівняння n-го порядку, яке містить у правій частині суму доданків з неперервними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

Доцільно також відзначити роботу В.М. Євтухова і Н.С. Васильєвої[26], в якій описана асимптотична поведінка всіх правильних неколивних розв'язків диференціального рівняння, що містить у лівій частині похідні першого та другого порядку від шуканої функції та неперервні коефіцієнти, а у лівій частині містить суму доданків з неперервними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

В останні десятиріччя особливу увагу звернули на себе диференціальні рівняння вигляду

$$y'' = \alpha p(t)\varphi(y),$$

---

[24] Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Дифференциальніе уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1980. – 154 с.

[25] Evtukhov V.M., Shebanina E.V. Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi. 1998. V. 13. P. 150–153.

[26] Evtukhov V.M., Vasiljeva N.S. Asimptotic representations of proper nonoscillation solutions of a class semilinear differential equations of the second order. Nonlinear Oscillations. 2001. V. 4, № 2. P. 190– 215.

де $\alpha \in \{-1,1\}$, $p: [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega < +\infty)$ – неперервна функція, $\varphi:]0, +\infty[\to \mathbb{R}\{0\}$ – неперервна функція, яка, взагалі кажучи, відмінна від степеневої.

Поштовхом до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь такого вигляду стала опублікована в 1930 році робота J. Karamata[27], основи якої викладені в монографіях Є. Сенети[28] і N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels[29]. Ці роботи присвячені теорії правильно змінних функцій.

Першим важливим представником рівнянь з правильно змінними нелінійностями стало двочленне диференціальне рівняння вказаного вище вигляду, в якому нелінійність є правильно змінною функцією порядку більше ніж одиниця. Такі рівняння досліджувались у роботах V. Maric, M. Tomic і S.D. Taliaferro[30], в яких для додатних розв'язків, що прямують до нуля при прямуючому до нескінченності аргументі, було встановлено двосторонні асимптотичні оцінки для співвідношення $\frac{y(t)}{\varphi(y(t))}$ та було отримано асимптотичні оцінки для співвідношень дещо складнішого вигляду. Причому умови існування розв'язків були з'ясовані лише для випадку прямуючих до нуля при прямуючому до нескінченності аргументі розв'язків вказаного диференціального рівняння. Пізніше в монографії V. Maric[31] досліджувалося це ж диференціальне рівняння у випадку, коли $\sigma = 1, Y_0 = 0$ і $\omega = +\infty$. Точні асимптотичні зображення в усіх випадках для прямуючих до нуля й до нескінченності монотонних розв'язків цього диференціального рівняння були отримані в роботах

---

[27] Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. Math. (Cluj) 1930. V. 4. P. 38–53.

[28] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. И.С. Шиганова, под редакцией В.М. Золотарева. М. : Наука. 1985.144 с.

[29] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

[30] Maric V., Tomic M. Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$. Math. Z. 1976. 149. P. 161–166.

Maric V.,Tomic M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations. Publ. Inst. Math. 1977. V. 21, № 5. P. 119–129.

Taliaferro S.D. On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$. Nonlinear anal. 1978. V. 3. P. 437–444.

Taliaferro S.D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$. SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 853–865.

[31] Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

В.М. Євтухова і Л.А. Кирилової[32] та Л.А. Кирилової[33], де для такого виду рівнянь був запроваджений новий клас розв'язків.

У цих роботах, на відміну від попередніх досліджень, розглядається не охоплений раніше випадок $\alpha = -1$. Для всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків двочленного диференціального рівняння другого порядку з правильно змінною нелінійністю було встановлено необхідні та достатні умови їх існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для кожного типу розв'язків та їх похідних першого порядку. Більш того, при певних додаткових обмеженнях на функцію φ були отримані асимптотичні зображення в явному вигляді. Дослідження проводились у припущенні, що φ – двічі неперервно диференційовна функція в області її визначення. Це обмеження вперше було знято в роботі В.М. Євтухова і А.М. Самойленка34, яка присвячена диференціальному рівнянню вигляду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y),$$

в якому $n \geq 2, \alpha \in \{-1,1\}$, $p: [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega < +\infty)$ – неперервна функція, $\varphi: \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ – неперервна правильно змінна при $y \to Y_0$ функція порядку $\sigma < 1, Y_0$ дорівнює або нулю, або $\pm\infty, \Delta_{Y_0}$ – однобічний окіл Y_0.

Разом з тим проводились дослідження двочленних диференціальних рівнянь другого порядку у випадку, коли нелінійність у правій частині рівняння є швидко змінною функцією.

Доволі цікавим є результат, який отримав V. Maric35 для такого диференціального рівняння, яке записаного у вигляді

$$y'' = p\big(g(t)\big)\varphi\big(\Psi(y)\big),$$

де функція g визначена в околі $+\infty$, додатна, двічі диференційовна, зростає до $+\infty$ при $t \to +\infty$ і така, що

[32] Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0256-5

[33] Кириллова Л.А. Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена-Фаулера : дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2006. 147 с.

[34] Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611105003X

[35] Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)g''(t)}{{g'}^2(t)} = \eta,$$

а функція Ψ визначена в правому околі нуля, додатна, двічі диференційовна, спадає до нуля при прямуючому до нуля аргументу і задовольняє умови з яких випливає, що ця функція може бути правильно або швидко змінною функцією.

Отримані V. Maric результати охопили достатньо широкий клас диференціальних рівнянь такого виду. Однак, клас розв'язків, для яких він отримав асимптотичні зображення був доволі вузьким. Тому задача про дослідження розв'язків диференціальних півнянь у випадку, коли в правій частині стоїть швидко змінна функція, залишалася актуальною.

У роботі В.М. Харькова36 було розглянуто двочленне диференціальне рівняння другого порядку з нелінійністю у правій частині, яка в залежності від знаень певного визначеного параметра може бути правильною або швидко змінною функцією. Для такого рівняння були встановлені необхідні та достатні умови існування та вказані асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення так званих $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків. Зазачимо, що цей клас розв'язків визначався через саму нелінійність. Концепція побудови такої класифікації суттєво спиралася на ідеї В.М. Євтухова та Н.Г. Дрік[37], які також були застосовані в роботах В. М. Євтухова та В.Н. Шинкаренка[38].

---

[36] Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных уравнений второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2009. 139 с.

[37] Evtukhov V.M., Drik N. G. Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation. Georgian Math. J. 1996. V. 3, № 2. P. 101–120.

Дрик Н.Г. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае. Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 1071–1072.

Дрик Н.Г. Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравений второго порядка: дис.... канд. физ. – мат. наук: [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1992. 122 с.

Евтухов В.М., Дрик Н.Г. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 133, № 1. С. 29–32.

[38] Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пізніше В.М Євтухову та А.Г. Черниковій[39], а також А.Г. Черниковій[40] вдолося встановити необхідні та достатні умови існування та описати асимптотику $P_{\omega}(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків двочленного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю у правій частині, однак слід відзначити, що на відміну від розв'язків, які досліджувалися у роботах В.М. Харькова, в цих дослідженнях клас розв'вязків визначався через саму невідому функцію відностно похідної, а нелінійність у визначенні розв'язків відсутня. Дослідження проводилися з використанням властивостей функцій із класу Γ, який запровадив Л. Хан[41].

Логічною та актуальною, як з теоретичної, так і з практичної точки зору, стає задача про дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у

---

n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью. Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 3 . С. 308–322.

Шинкаренко В.Н. Асимпотические представления решений дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейность. Нелінійні коливання. 2004. Т. 7, № 4. С. 562–573.

Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [спец.]: «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса. 2005. 150 с.

[39] Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2016. Т. 19, № 4. С. 458–475.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2017. Т. 20, № 3. С. 346–360.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 10. С. 1345–1363.

Евтухов В. М., Черникова А. Г. Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2019. Т. 71, № 1. С. 73–91.

[40] Черникова А. Г. Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. 2015. Т. 20, № 2. С. 56–68.

[41] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

правій частині нелінійності різного виду, тобто і правильно і швидко змінні нелінійності. Саме такому випадку присвячена ця робота.

3. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y),$$

в якому $\alpha_i \in \{-1,1\}, p_i\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \le +\infty$; $\varphi_i\colon \Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$, де Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними при $i=\overline{1,l}$ і двічі неперервно диференційовними при $i=\overline{l+1,m}$ та задовольняють умови

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\epsilon Y_0}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i}, \qquad i=1,\dots,l, \text{для будь} - \text{якого } \lambda > 0,$$

$$\varphi_i'(y) \ne 0, \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\epsilon Y_0}} \varphi_i(y) \in \{0,+\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\epsilon Y_0}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1, \qquad i=l+1,\dots,m.$$

Із вказаних умов, зокрема, випливає, що при $i=\overline{1,l}$ функції φ_i є правильно змінними при $y\to Y_0$ функціями порядків $\sigma_i\epsilon\mathbb{R}$, а при $i=\overline{l+1,m}$ – швидко змінними при $y\to Y_0$ функціями.

Предметом дослідження роботи є асимптотична поведінка так-званих $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$– розв’язків.

Означення. Розв’язок у рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв’язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Вперше $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$– розв’язки були визначені у роботі В. М. Євтухова[42]. У цій же роботі детально описані властивості цього класу розв’язків.

За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв’язків розпадається на чотири неперетинні підмножини в залежності від значень параметра λ_0, а саме

$$\lambda_0\epsilon\mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \lambda_0 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_0 = \pm\infty.$$

[42] Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»/ Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. 295 с.

Метою цієї роботи є узагальнення результатів, отриманих для кожної з цих підмножин окремо, а саме встановлення необхідних та достатніх умов існування, а також асимптотичних зображень $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1) та їх похідних першого порядку при $t \uparrow \omega$ у випадку, коли на кожному розв'язку y права частина диференціального рівняння (1) еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку з правильно або зі швидко змінною нелінійністю, тобто, коли для деякого $s \epsilon \{1, \dots, m\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \text{ при } i \epsilon \{1, \dots, m\} \backslash \{s\}. \qquad (2)$$

При $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$ $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є правильно змінними при $t \uparrow \omega$ функціями порядку відмінного від першого, при $\lambda_0 = 0$ $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є повільно змінними при $t \uparrow \omega$ функціями, при $\lambda_0 = 1$ $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є швидко змінними при $t \uparrow \omega$ функціями, а при $\lambda_0 = \pm\infty$ $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є правильно змінними функціями першого порядку (це так-званий особливий випадок, методика дослідження якого суттєво відрізняється від попередніх випадків).

Кожна з цих підмножин досліджена окремо за припущенням, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

де

$$\Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл } Y_0, \\ ]Y_0, b], \quad \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл } Y_0, \end{cases}$$

і число b задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \text{ при } Y_0 = 0,$$
$$b > 1 \ (b < -1) \text{ при } Y_0 = +\infty \ (Y_0 = -\infty),$$
$$\nu_0 = \operatorname{sign} b,$$
$$\nu_1 = \begin{cases} 1, \text{якщо } \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ -1, \quad \text{якщо } \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Числа ν_0 та ν_1 визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку та його першої похідної (відповідно) в деякому лівому околі ω.

4. Асимптотична поведінка правильно змінних розв'язків диференціального рівняння (1)

У випадку, коли $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є правильно змінними при $t \uparrow \omega$ функціями. Щоб сформулювати отримані результати для $s \epsilon \{1, \dots, m\}$ введемо позначення:

$$H_s(y) = \int\limits_{B_{1s}}^{y} \frac{dx}{\varphi_s(x)},$$

$$B_{1s} = \begin{cases} b, \text{якщо} \int\limits_{b}^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, \quad \text{якщо} \int\limits_{b}^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_s(y)} = \text{const}, \end{cases}$$

$$Z_s = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y), \qquad J_{1s}(t) = \int\limits_{A_{1s}}^{t} \pi_\omega(\tau) p_s(\tau) d\tau,$$

$$J_{2s}(t) = \int\limits_{A_{2s}}^{t} \pi_\omega(\tau) p_{0s}(\tau) d\tau,$$

$$Y_{is}(t) = H_s^{-1}\big(\alpha_s(\lambda_0 - 1) J_{is}(t)\big) \ (i = 1,2), \qquad \mu_s = \text{sign}\varphi'_s(y),$$

$$q_s(t) = \frac{\alpha_s(\lambda_0 - 1)\pi_\omega^2(t) p_{0s}(t) \varphi_s\big(Y_{2s}(t)\big)}{Y_{2s}(t)}, \qquad G_{1s}(t) = \left.\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|_{y = Y_{2s}(t)},$$

$$\Phi_{1s}(t) = \left.\frac{y \cdot \left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}}\right|_{y = Y_{2s}(t)}, \qquad \Psi_{1s}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|G_{1s}(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{\pi_\omega(\tau)} d\tau,$$

в яких

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$A_{1s}, A_{2s} \epsilon \{a, \omega\}$ обираються аналогічно B_{1s} так, щоб відповідні інтеграли прямували або до $\pm\infty$, або до нуля при $t \uparrow \omega$, $p_{0s}: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, така, що $p_{0s}(t) \sim p_s(t)$ при $t \uparrow \omega, t_0$ – деяке число із проміжку $[a, \omega[$.

Для випадку, коли $s \epsilon \{1, \dots, l\}$, тобто, коли головним у правій частині диференціального рівняння (1) є доданок з правильно змінною нелінійністю, встановлено такі результати:

Теорема 4.1. Нехай $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$ і $\sigma_s \neq 1$ при деякому $s \epsilon \{1, \dots, l\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб виконувались умови

$$\alpha_s \nu_0 \lambda_0 > 0, \nu_0 \nu_1 \lambda_0 (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0 \text{ при } t \epsilon]a, \omega[, \tag{3}$$

$$\alpha_s(\lambda_0 - 1) \lim_{t \uparrow \omega} J_{1s}(t) = Z_s, \ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{1s}(t)}{J_{1s}(t)} = \frac{(1 - \sigma_s)\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{4}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t) \varphi_i(Y_{1s}(t))}{p_s(t) \varphi_s(Y_{1s}(t))} = 0 \text{ для кожного } i \epsilon \{1, \dots, l\} \backslash \{s\}, \tag{5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{1s}(t))}=0 \text{ для кожного } i\epsilon\{l+1,\dots,m\},$$

де δ_i – будь-яке число із деякого однобічного околу нуля. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення

$$y(t)=Y_{1s}(t)[1+o(1)], \qquad y'(t)=\frac{\lambda_0 Y_{1s}(t)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \qquad (6)$$

Теорема 4.2. Нехай $\lambda_0\epsilon\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ і $\sigma_s\neq 1$ для деякого $s\epsilon\{1,\dots,l\}$, виконуються умови (3)–(5), а також

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_{1s}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{1s}(t))}=0$$

при будь-якому $i\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ рівномірно за $u\epsilon[-\delta,\delta]$ для деякого $0<\delta<1$. Нехай, крім того, має місце одна із двох умов або $\lambda_0\neq -1$, або $\lambda_0=-1$ і $\sigma_s<1$.

Тоді у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (6), причому існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли

$$\lambda_0(1-\sigma_s)<0$$

і двопараметрична сім'я – у випадку, коли

$$\lambda_0(1-\sigma_s)>0$$

і при цьому

$$(1-{\lambda_0}^2)\pi_\omega(t)<0 \text{ при } t\epsilon]a,\omega[.$$

У випадку, коли в правій частині диференціального рівняння (1) відсутні доданки зі швидко змінною нелінійністю та існує лише один доданок з правильно змінною нелінійністю, отримані результати (окрім асимптотичних при $t\uparrow\omega$ зображень (6)) співпадають з результатами роботи В. М. Євтухова і А. М. Самойленка[43], в якій досліджувалася асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$– розв'язків двочленного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінною нелінійністю, а у випадку, коли в правій частині диференціального рівняння (1) стоять лише доданки з правильно змінною нелінійністю, отримані результати суттєво доповнюють результати, які отримані в роботі В. А. Касьянової[44].

---

[43] Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611105003X

[44] Касьянова В.А. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Вісник Чернівецького університету. 2004. Вип. 228, Математика. С. 15–29.

У наступних теоремах вказані необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння (1) при $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ у випадку, коли головним у правій частині рівняння є доданок зі швидко змінною нелінійністю, а також асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Теорема 4.3. Нехай $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, для деякого $s\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ функція p_s подана у вигляді

$$p_s(t) = p_{0s}(t)[1 + r_s(t)], \text{ де } \lim_{t\uparrow\omega} r_s(t) = 0, \tag{7}$$

$p_{0s}: [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервно диференційовна функція,

$r_s: [a,\omega[\to]-1,+\infty[$ – неперервна функція, і виконуються умови

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi'_i(y)}{\varphi'_s(y)\varphi_i(y)} = O(1) \text{ при } y \to Y_0 \tag{8}$$

для будь-якого $i\epsilon\{l+1,\dots,m\}$.

Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб

$$\alpha_s\nu_0\lambda_0 > 0, \alpha_s\mu_s(\lambda_0 - 1)J_{2s}(t) < 0 \text{ при } t\epsilon]a,\omega[, \tag{9}$$

$$\alpha_s(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J_{2s}(t) = Z_s,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{2s}(t)}{J_{2s}(t)} = \pm\infty,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} q_s(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{2s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{2s}(t))} = 0 \text{ для будь-якого } i\epsilon\{1,\dots,m\}\setminus\{s\}. \tag{11}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення

$$y(t) = Y_{2s}(t)\left[1 + \frac{o(1)}{G_{1s}(t)}\right], \qquad y'(t) = \frac{\lambda_0 Y_{2s}(t)}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)]. \tag{12}$$

Теорема 4.4. Нехай $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, для деякого $s\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ функція p_s подана у вигляді (7), виконуються умови (8) – (12) та існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\gamma_{1s} = \lim_{t\uparrow\omega}\Phi_{1s}(t), \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)q'_s(t), \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Psi_{1s}(t)\Psi''_{1s}(t)}{\Psi'^2_{1s}(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, то у диференціального рівняння (1) існує однопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків із асимптотичними при $t\uparrow\omega$ зображеннями

$$y(t) = Y_{2s}(t)\left[1 + \frac{o(1)}{G_{1s}(t)}\right], \qquad y'(t) = \frac{Y_{2s}(t)q_s(t)}{\pi_\omega(t)}\left[1 + \frac{o(1)}{|G_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}}\right];$$

2) якщо $\alpha_s\mu_s = -1$ і виконуються умови

$$(\gamma_{1s} + 1)(5\lambda_0\gamma_{1s} + 3\lambda_0 - 2) \neq 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{1s}(t)\left[q_s(t)[1 + r_s(t)] - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{1s}^2(t)\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q_s(t)\right)q_s(t) + \frac{q_s(t)r_s(t)}{\lambda_0 - 1} - \pi_\omega(t)q_s'(t)\right] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{1s}^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{2s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{2s}(t))} = 0,$$

то у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв’язки, які допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = Y_{2s}(t)\left[1 + \frac{o(1)}{\Psi_{1s}(t)G_{1s}(t)}\right],$$

$$y'(t) = \frac{Y_{2s}(t)q_s(t)}{\pi_\omega(t)}\left[1 + \frac{o(1)}{\Psi_{1s}(t)|G_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}}\right],$$

причому існує двопараметрична сім’я таких розв’язків, якщо $\lambda_0(1 + \gamma_{1s})(5\lambda_0\gamma_{1s} + 3\lambda_0 - 2) < 0$ при $\gamma_{1s} = \text{const}$.

Випадок 2) в теоремі 4.4 є нетривіальним та потребує застосування додаткових тригонометричних перетворень системи квазілінійних диференціальних рівнянь, яка виникає при доведенні теореми. Ці перетворення дозволяють звести таку систему до більш зручного для дослідження виду, який розглянено у роботі В.М. Євтухова і А.М. Самойленка[45]. Аналогічного типу перетворення використовуються в теоремах 5.4, 6.4 та 7.4.

Отримані результати можуть бути використані при дослідженні сингулярних $P_{\omega*}(Y_0, \lambda_0)$-розв’язків диференціального рівняння (1), тобто розв’язків для яких функції p_i $(i = \overline{1, m})$ є неперервними на проміжку $[a, \omega^*[$, де $\omega^* < \omega$.

З повним доведенням теорем 3.1−3.4 можна ознайомитись у роботах В.М. Євтухова і А.М. Самойленка[46], де теореми 3.1−3.4

---

[45] Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 1. С. 52–80. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-010-0333-7

[46] Евтухов В.М., Колун Н.П. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися

також ілюстровані на прикладі диференціального рівняння, що містить у правій частині суму доданків зі степеневою та з експоненціальною нелінійностями.

5. Асимптотична поведінка швидко змінних розв'язків диференціального рівняння (1)

У цьому параграфі розглянемо випадок, коли $\lambda_0 = 1$, тобто, коли $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є швидко змінними функціями. Щоб сформулювати отримані в цьому розділі результати, окрім введених раніше позначень, для деякого $s\epsilon\{1, \dots, l\}$ введемо функції

$$J_{3s}(t) = \int_{A_{3s}}^{t} p_s(\tau)d\tau, \quad J_{4s}(t) = \int_{A_{4s}}^{t} J_{3s}(\tau)d\tau, Y_{3s}(t) = H_s^{-1}\big(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{4s}(t)\big),$$

де $A_{3s}, A_{4s}\epsilon\{a, \omega\}$ і обираються аналогічно B_{1s}, так, щоб відповідні інтеграли прямували або до $\pm\infty$, або до нуля при $t \uparrow \omega$. Крім того, для деякого $s\epsilon\{l+1, \dots, m\}$ введемо функцію

$$\Phi_s(y) = \int_{B_{2s}}^{y} \frac{du}{|u|^{\frac{1}{2}}\varphi_s^{\frac{1}{2}}(u)},$$

в якій $B_{2s} \in \{b, Y_0\}$ і обирається аналогічно B_{1s}, так, щоб відповідний інтеграл прямував або до 0, або до $\pm\infty$ при $y \to Y_0$.

Введемо також позначення

$$Z_{1s} = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y\epsilon\Delta_{Y_0}(b)}} \Phi_s(y), J_{5s}(t) = \int_{A_{5s}}^{t} p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau, \qquad Y_{4s}(t) = \Phi_s^{-1}\big(\nu_1 J_{5s}(t)\big),$$

$$J_{6s}(t) = \int_{A_{6s}}^{t} p_{0s}(\tau)\,\varphi_s\big(Y_{4s}(\tau)\big)d\tau, q_{1s}(t) = \frac{\alpha_s \nu_1 J_{6s}(t)}{p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)|Y_{4s}(t)|^{\frac{1}{2}}\varphi_s^{\frac{1}{2}}\big(Y_{4s}(t)\big)},$$

$$q_{2s}(t) = \frac{\pi_\omega(t)p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(Y_{4s}(t))}{|Y_{4s}(t)|^{\frac{1}{2}}}, G_{2s}(t) = \left.\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|_{y=Y_{4s}(t)},$$

нелинейностями. Мат. методы и физ.-мех. поля. 2017. Т. 60, № 1. С. 32–43. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04546-w

Евтухов В.М., Колун Н.П. Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка. Нелинейные колебания. 2018. Т. 21, № 3. С. 323–346. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04334-6

$$\Phi_{2s}(t) = \left. \frac{y \cdot \left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}} \right|_{y=Y_{4s}(t)},$$

в яких границі інтегрування $A_{5s}, A_{6s} \epsilon \{a, \omega\}$ і обираються аналогічно B_{1s} так, щоб відповідні інтеграли прямували або до $\pm\infty$, або до нуля при $t \uparrow \omega$.

Також будемо вважати, що

$$h_s(t) = \frac{\nu_1 Y_{4s}(t)}{p_{0s}(t)\varphi_s(Y_{4s}(t))} \cdot \left(\frac{p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(Y_{4s}(t))}{|Y_{4s}(t)|^{\frac{1}{2}}} \right)',$$

$$\Psi_{2s}(t) = \int_{t_0}^{t} p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi'_s(Y_{4s}(\tau))|^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

де t_0– деяке число із проміжку $[a, \omega[$.

У наступних теоремах для диференціального рівняння (1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків та вказуються асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку у випадку, коли головним у правій частині диференціального рівняння (1) є доданок з правильно змінною нелінійністю.

Теорема 5.1. Нехай $\sigma_s \neq 1$ для деякого $s \epsilon \{1, \dots, l\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб

$$\alpha_s \nu_0 > 0, \alpha_s \nu_1 (1 - \sigma_s) J_{3s}(t) > 0 \text{ при } t \epsilon]a, \omega[, \qquad (13)$$

$$\alpha_s (1 - \sigma_s) \lim_{t \uparrow \omega} J_{4s}(t) = Z_s, \lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_s(t) J_{4s}(t)}{J_{3s}^2(t)} = 1, \qquad (14)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{3s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{3s}(t))} = 0 \text{ для будь-якого } i \epsilon \{1, \dots, l\} \backslash \{s\}. \qquad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{4s}(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{3s}(t))} = 0 \text{ для кожного } i \epsilon \{l+1, \dots, m\},$$

де δ_i – будь-яке число із деякого однобічного околу нуля.

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення

$$y(t) = Y_{3s}(t)[1 + o(1)], \ \ y'(t) = \frac{J_{3s}(t) Y_{3s}(t)}{(1 - \sigma_s) J_{4s}(t)} [1 + o(1)]. \qquad (16)$$

Теорема 5.2. Нехай $\sigma_s \neq 1$ для деякого $s \epsilon \{1, \dots, l\}$, виконуються умови (13) – (15) і при будь-якому $i \epsilon \{l+1, \dots, m\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{4s}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{3s}(t))} = 0$$

рівномірно за $u \in [-\delta, \delta]$ для деякого $0 < \delta < 1$. Тоді у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язки, які припускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (16), причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я у випадку, коли $\sigma_s > 1$ і двопараметрична – коли $\sigma_s < 1$ і $\alpha_s \nu_1 > 0$.

Для випадку, коли головним у правій частині диференціального рівняння (1) є доданок зі швидко змінною нелінійністю отримано такі результати:

Теорема 5.3. Нехай для деякого $s \epsilon \{l+1, \dots, m\}$ функція p_s подана у вигляді (7), $p_{0s}: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_s: [a, \omega[\to]-1, +\infty[$ – неперервна функція, і виконуються умови (8). Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб

$$\alpha_s \nu_0 > 0, \ \nu_1 \mu_s J_{5s}(t) < 0 \text{ при } t \epsilon]a, \omega[, \tag{17}$$

$$\nu_1 \lim_{t\uparrow\omega} J_{5s}(t) = Z_{1s}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{5s}(t)}{J_{5s}(t)} = \pm\infty, \lim_{t\uparrow\omega} q_{1s}(t) = 1, \lim_{t\uparrow\omega} q_{2s}(t) = \pm\infty, \tag{18}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{4s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{4s}(t))} = 0 \text{ для будь-якого } i \epsilon \{1, \dots, m\} \backslash \{s\}. \tag{19}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення

$$y(t) = Y_{4s}(t) \left[1 + \frac{o(1)}{G_{2s}(t)}\right], \tag{20}$$

$$y'(t) = \nu_1 p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t) \varphi_s^{\frac{1}{2}}\big(Y_{4s}(t)\big) |Y_{4s}(t)|^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)]. \tag{21}$$

Теорема 5.4. Нехай для деякого $s \epsilon \{l+1, \dots, m\}$ функція p_s подана у вигляді (7), виконуються умови (8), (17) – (19) і існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\gamma_{2s} = \lim_{t\uparrow\omega} \Phi_{2s}(t), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} h_s(t), \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2} \cdot \sqrt{\left|\frac{y \varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Psi_{2s}(t) \Psi''_{2s}(t)}{\Psi'^2_{2s}(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s \mu_s = 1$, то у диференціального рівняння (1) існує однопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків, які припускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (20), (21), причому таких, що їх похідна задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичне співвідношення

$$y'(t) = Y'_{4s}(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|G_{2s}(t)|^{\frac{1}{2}}}\right].$$

2) якщо $\alpha_s \mu_s = -1$ і виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Psi_{2s}(t) r_s(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \Psi^2_{2s}(t) [r_s(t) - h_s(t)] = 0, \qquad \gamma_{2s} \neq -\frac{1}{5}, -1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Psi^2_{2s}(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{4s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{4s}(t))} = 0,$$

то у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язки, які припускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = Y_{4s}(t)\left[1 + \frac{o(1)}{\Psi_{2s}(t)G_{2s}(t)}\right], \qquad y'(t) = Y'_{4s}(t)\left[1 + \frac{o(1)}{\Psi_{2s}(t)|G_{2s}(t)|^{\frac{1}{2}}}\right],$$

причому таких розв'язків існує двопараметрична сім'я при $\gamma_{2s} \in \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$.

З повним доведенням сформульованих вище теорем можна ознайомитись у роботі В.М. Євтухова і Н.П. Колун[47]. Отримані результати ілюстровані на тому самому прикладі, що і результати із другого параграфу.

6. Асимптотична поведінка повільно змінних розв'язків диференціального рівняння (1)

У цьому параграфі розглянемо випадок, коли $\lambda_0 = 0$. При такому значенні параметра λ_0 розв'язки, що досліджуються в роботі, є повільно змінними функціями. Щоб сформулювати отримані результати, введемо додатково при деякому $s \epsilon \{l+1, \dots, m\}$ позначення

$$Y_{5s}(t) = H_s^{-1}\big(\alpha_s J_{4s}(t)\big), \qquad Y_{6s}(t) = H_s^{-1}\big(-\alpha_s J_{2s}(t)\big),$$

$$J_{\varphi_s}(t) = \int\limits_{A_{\varphi_s}}^{t} p_{0s}(\tau)\,\varphi_s\big(Y_{6s}(\tau)\big)d\tau, E_s(t) = \alpha_s \pi_\omega^2(t) p_{0s}(t)\varphi'_s\big(Y_{6s}(t)\big),$$

$$G_{3s}(t) = \left.\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|_{y=Y_{6s}(t)}, \Phi_{3s}(t) = \left.\frac{y \cdot \left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}}\right|_{y=Y_{6s}(t)},$$

$$\gamma_{3s} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{E_s(t)\Phi_{3s}(t)}{G_{3s}(t)}, \qquad \Psi_{3s}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|E_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{|\pi_\omega(\tau)|}d\tau,$$

де $A_{\varphi_s} \epsilon \{a, \omega\}$ і обирається аналогічно B_{1s} так, щоб відповідний інтеграл прямував або до $\pm\infty$, або до нуля при $t \uparrow \omega$, t_0 – деяке число із проміжку $[a, \omega[$.

У наступних теоремах для диференціального рівняння (1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків, вирішується питання про їх кількість та вказуються асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку для випадку, коли головним у правій

---

[47] Евтухов В.М., Колун Н.П. Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. Український математичний вісник. 2018. Т. 15, № 1. С. 18–42. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4055-y

частині диференціального рівняння (1) є доданок з правильно змінною нелінійністю.

Теорема 6.1. Нехай $\sigma_s \neq 1$ для деякого $s\epsilon\{1, \dots, l\}$ та існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{3s}(t)}{J_{3s}(t)}.$$

Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб

$$\alpha_s \nu_0 (1 - \sigma_s) J_{4s}(t) > 0,\ \alpha_s \nu_1 \pi_\omega(t) < 0 \text{ при } t\epsilon]a, \omega[, \qquad (22)$$

$$\alpha_s \lim_{t\uparrow\omega} J_{4s}(t) = Z_s,\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{3s}(t)}{J_{3s}(t)} = -1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J^2_{3s}(t)}{p_s(t) J_{4s}(t)} = 0, \qquad (23)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{5s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{5s}(t))} = 0 \text{ для будь-якого } i\epsilon\{1, \dots, l\}\backslash\{s\}. \qquad (24)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{4s}(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{5s}(t))} = 0 \text{ для кожного } i\epsilon\{l+1, \dots, m\},$$

де δ_i – будь-яке число із деякого однобічного околу нуля.

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення

$$y(t) = Y_{5s}(t)[1 + o(1)], \qquad y'(t) = \frac{J_{3s}(t) Y_{5s}(t)}{(1 - \sigma_s) J_{4s}(t)}[1 + o(1)]. \qquad (25)$$

Теорема 6.2. Нехай $\sigma_s \neq 1$ для деякого $s\epsilon\{1, \dots, l\}$, справедливі умови (23)–(25) і при будь-якому $i\epsilon\{l+1, \dots, m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{4s}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{5s}(t))} = 0$$

рівномірно за $u \in [-\delta, \delta]$ для деякого $0 < \delta < 1$. Тоді у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язки, які припускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (25), причому, якщо

$\alpha_s \nu_0 (1 - \sigma_s) \pi_\omega(t) < 0$ при $t\epsilon]a, \omega[$,

то при $\omega = +\infty$ таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, а при $\omega < +\infty$ – двопараметрична сім'я.

У наступній теоремі для диференціального рівняння (1) встановлюються необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків та вказуються асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку у випадку, коли головним у правій частині диференціального рівняння (1) є доданок зі швидко змінною нелінійністю.

Теорема 6.3. Нехай для деякого $s\epsilon\{l+1, \dots, m\}$ функція p_s подана у вигляді (7), $p_{0s}: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція, $r_s: [a, \omega[\to] -1, +\infty[$ – неперервна функція, і виконуються умови (8). Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), та для яких існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}(t)},$$

необхідно, щоб виконувались умови

$$\alpha_s\nu_1\pi_\omega(t)<0,\ \ \alpha_s\mu_s J_{2s}(t)>0 \text{ при } t\epsilon]a,\omega[, \tag{26}$$

$$-\alpha_s\lim_{t\uparrow\omega}J_{2s}(t)=Z_s,\ \ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{\varphi_s}(t)}{J_{\varphi_s}(t)}=-1,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega^2(t)p_{0s}(t)\varphi_s(Y_{6s}(t))}{Y_{6s}(t)}=0, \tag{27}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y_{6s}(t))}{p_s(t)\varphi_s(Y_{6s}(t))}=0 \text{ для будь-якого } i\epsilon\{1,\dots,m\}\backslash\{s\}. \tag{28}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y(t)=Y_{6s}(t)\left[1+\frac{o(1)}{G_{3s}(t)}\right],'$$
$$y'(t)=-\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s\big(Y_{6s}(t)\big)[1+o(1)]. \tag{29}$$

У теоремах 6.4–6.5 для диференціального рівняння (1) встановлюються достатні умови існування $P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків в залежності від значення границі

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{2s}(t)}{J_{2s}(t)}$$

та вирішується питання про кількість таких розв'язків зі знайденими при $t\uparrow\omega$ асимптотичними зображеннями (29).

Теорема 6.4. Нехай при деякому $s\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ виконуються умови (8), (26)–(28) і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{2s}(t)}{J_{2s}(t)}=\eta_s, \text{ де } \eta_s\in\mathbb{R}.$$

Тоді: 1) якщо $\eta_s>0$ або $\eta_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=1$, то рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків, які припускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (29); 2) якщо $\eta_s<0$ або $\eta_s=0$ і $\alpha_s\mu_s=-1$, то при $\omega<+\infty$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків, які припускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (29), а при $\omega=+\infty$ – щонайменш один такий розв'язок.

Теорема 6.5. Нехай для деякого $s\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ функція p_s подана у вигляді (7). Нехай, крім того, виконуються умови (8), (26)–(28),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{2s}(t)}{J_{2s}(t)}=\pm\infty$$

і існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)},\ \ \gamma_{3s}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{E_s(t)\Phi_{3s}(t)}{G_{3s}(t)},$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\cdot\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Psi_{3s}(t)\Psi_{3s}''(t)}{\Psi_{3s}'^2(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, то у диференціального рівняння (1) існує однопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків з асимптотичними при $t\uparrow\omega$ зображеннями (29), причому таких, що їх похідна задовольняє асимптотичне при $t\uparrow\omega$ співвідношення

$$y'(t) = -\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s\big(Y_{6s}(t)\big)\left[1+|E_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\cdot o(1)\right];$$

2) якщо $\alpha_s\mu_s = -1$ і виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{3s}(t)r_s(t) = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{3s}^2(t)\left[r_s(t)+2+\frac{\pi_\omega(t)J''_{\varphi_s}(t)}{J'_{\varphi_s}(t)}\right] = 0,\qquad \gamma_{3s}\neq\frac{1}{3},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Psi_{3s}^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i\big(Y_{6s}(t)\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(Y_{6s}(t)\big)} = 0,\ \text{ при } \gamma_{3s}=0\ \ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Psi_{3s}(t)}{E_s(t)} = 0,$$

то у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язки, які припускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = Y_{6s}(t)\left[1+\frac{o(1)}{\Psi_{3s}(t)G_{3s}(t)}\right],$$

$$y'(t) = -\alpha_s\pi_\omega(t)p_{0s}(t)\varphi_s(Y_{6s}(t))\left[1+\frac{o(1)}{\Psi_{3s}(t)|E_s(t)|^{\frac{1}{2}}}\right],$$

причому таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли $\gamma_{3s}\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ або $\gamma_{3s}=0$ і $\alpha_s\nu_1 = 1$.

Отримані результати ілюстровані на прикладі[48].

7. Асимптотична поведінка розв'язків диференціального рівняння (1) в особливому випадку

У цьому параграфі розглянемо особливий випадок, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, тобто, коли $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) є правильно змінними при $t\uparrow\omega$ функціями першого порядку. Окрім раніше введених позначень, у випадку, коли

[48] Evtukhov V.M., Kolun N.P. Asymptotic Behaviour of Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi : Georgian Academy of Sciences. 2018. V. 75. P. 105–114.

Колун Н.П. Асимптотика медленно меняющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. Досл. в мат. і мех. 2018. Т. 23, № 2(32). С. 54–67.

$$\nu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0,$$

оберемо число $a_1 \in [a, \omega[$ так, щоб $\nu_0|\pi_\omega(t)| \in \Delta_{Y_0}(b)$ при $t \in [a_1, \omega[$, і покладемо при $s \epsilon \{1, \dots, l\}$

$$J_{7s}(t) = \int_{A_{7s}}^{t} p_s(\tau)\varphi_s(\nu_0|\pi_\omega(\tau)|)d\tau,$$

де $A_{7s} \epsilon \{a, \omega\}$ і обирається аналогічно B_{1s} так, щоб відповідний інтеграл прямував або до $\pm\infty$, або до нуля при $t \uparrow \omega$.

У теоремах 6.1 та 6.2 для диференціального рівняння (1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків, вирішується питання про їх кількість та вказуються асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку для випадку, коли головним у правій частині рівняння (1) є доданок з правильно змінною нелінійністю.

Теорема 7.1. Нехай $\sigma_s \neq 1$ при деякому $s \epsilon \{1, \dots, l\}$ і функція L_s задовольняє умову S_0. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків, які задовольняють умови (2), необхідно, щоб

$$\nu_0\nu_1\pi_\omega(t) > 0, \ \alpha_s\nu_1(1-\sigma_s)J_{7s}(t) > 0 \text{ при } t\epsilon]a_1, \omega[, \tag{30}$$

$$\nu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{7s}(t)}{J_{7s}(t)} = 0, \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}\right)} = 0 \text{ для всіх } i\epsilon\{1, \dots, l\}\backslash\{s\}, \tag{32}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}(1+\delta_i)\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}\right)} = 0$$

для кожного $i\epsilon\{l+1, \dots, m\}$, де δ_i – будь-які числа із деякого однобічного околу нуля.

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення

$$y(t) = \nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}[1+o(1)], \tag{33}$$

$$y'(t) = \nu_1|(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}[1+o(1)]. \tag{34}$$

Теорема 7.2. Нехай для деякого $s\epsilon\{1, \dots, l\}$ функція L_s задовольняє умову S_0, виконується нерівність $\sigma_s \neq 1$, умови (30)–(32) і при будь-якому $i\epsilon\{l+1, \dots, m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}(1+u)\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(\nu_0|\pi_\omega(t)||(1-\sigma_s)J_{7s}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_s}}\right)}=0$$

рівномірно за $u\in[-\delta,\delta]$ для деякого $0<\delta<1$. Тоді у диференціального рівняння (1) існує щонайменш один $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язок, який припускає при $t\uparrow\omega$ асимптотитичні зображення (33) і (34). Причому, якщо $\omega=+\infty$ і $A_{7s}=+\infty$, розв'язків з такими зображеннями існує однопараметрична сім'я, а у випадку $A_{7s}=a_1$ – двопараметрична сім'я.

Наступні результати представляють собою необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язків диференціального рівняння (1) у випадку, коли головним у правій частині рівняння є доданок зі швидко змінною нелінійністю. Також вирішується питання про кількість таких розв'язків та вказуються асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Методика дослідження $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1), яка використовувалася при встановленні результатів із попередніх параграфів, для цього випадку виявилася недієвою, тому дослідження проводяться іншим методом, який був запропонований В. М. Євтуховим і А. Г. Черниковою при дослідженні двочленного диференціального рівняння зі швидко змінною нелінійністю.

Теорема 7.3. Кожний $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє при деякому $s\epsilon\{l+1,\dots,m\}$ умови (2), має вигляд

$$y(t)=\pi_\omega(t)L(t),$$

де $L:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\nu_0L(t)\pi_\omega(t)>0,\ L'(t)\neq0 \text{ при } t\in[t_1,\omega[\ \ (t_1\in[t_0,\omega[), \tag{35}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}L(t)\in\{0,\pm\infty\},\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)L(t)=Y_0,\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}=0, \tag{36}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}=0 \text{ для будь-якого } i\epsilon\{1,\dots,m\}\backslash\{s\}. \tag{37}$$

При цьому, якщо існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)},$$

крім того, виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}=-1,\ \alpha_sL'(t)>0 \text{ при } t\in[t_1,\omega[\tag{38}$$

і має місце асимптотичне співвідношення

$$p_s(t)\sim\frac{\alpha_sL'(t)}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))} \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{39}$$

Нижче будемо казати, що дотримуються умови N, якщо виконуються умови

$$\beta\nu_0\nu_1 > 0 \ \left(\beta = \mathrm{sign}\pi_\omega(t)\right),$$
$$Y_0 = 0, \text{якщо } \omega < +\infty,$$
$$Y_0 = \pm\infty, \text{якщо } \omega = +\infty,$$

і для деякої двічі неперервно диференційовної функції $L: [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_0 \in [a, \omega[)$, що задовольняє умови (35), (36) і (38), має місце зображення

$$p_s(t) = \frac{\alpha_s L'(t)[1 + r_{0s}(t)]}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))},$$

де $r_{0s}: [t_0, \omega[\to]-1, +\infty[$ – неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$ (тобто виконується умова (39)).

Умови N у випадку існування скінченої або рівної $\pm\infty$ границі

$$\operatorname*{Lim}_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}$$

є необхідними для існування $P_\omega(Y_0, \pm\infty) -$ розв'язків у диференціального рівняння (1).

Нехай для деякого $s \epsilon \{l+1, \dots, m\}$

$$G_{4s}(t) = \left.\frac{y\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)}, \Phi_{4s}(t) = \left.\frac{y \cdot \left(\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi'_s(y)}{\varphi_s(y)}}\right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \qquad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)},$$

$$H_{0s}(t) = \frac{L^2(t)\varphi'_s\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)}{L'(t)\varphi_s\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)}, \ \ \Psi_{4s}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H_{0s}(\tau)|^{\frac{1}{2}}}{L(\tau)} d\tau,$$

де t_0 – деяке число із проміжку $[a, \omega[$, і додатково припустимо, що існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H'_{0s}(t)}{|H_{0s}(t)|^{\frac{3}{2}}}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H_{0s}(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0.$$

Теорема 7.4. Нехай при деякому $s \epsilon \{l+1, \dots, m\}$ виконуються умови (8), справедливі умови N, (37),

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H'_{0s}(t)}{|H_{0s}(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0, \tag{40}$$

$\gamma_0 = \pm\infty$ і існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_{4s}(t) = \gamma_{4s}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Psi_{4s}(t)\Psi''_{4s}(t)}{\Psi'^2_{4s}(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, то диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків, які припускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_s\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)}{\varphi_s'\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)} o(1), \qquad (41)$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)]\left[1 + |H_{0s}(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1)\right]; \qquad (42)$$

2) якщо $\alpha_s\mu_s = -1$ і виконуються умови

$$\gamma_{4s} \neq -1, -\frac{3}{4}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \Psi_{4s}(t)[r_{0s}(t) + 1 - e_1^2(t)] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Psi_{4s}^2(t)[r_{0s}(t) + 1 - e_2(t)] = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Psi_{4s}^2(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{m} \frac{p_i(t)\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))} = 0,$$

то диференціальне рівняння (1) має щонайменш один $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язок, який припускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_s\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)}{\varphi_s'\big(\pi_\omega(t)L(t)\big)\Psi_{4s}(t)} o(1),$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)]\left[1 + |H_{0s}(t)|^{-\frac{1}{2}} \Psi_{4s}^{-1}(t) o(1)\right];$$

причому таких розв'язків існує ціла двопараметрична сім'я у випадку, коли $\gamma_{4s} \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$.

Аналогічного типу результати отримані у випадках, коли $0 < |\gamma_0| < +\infty$ та $\gamma_0 = 0$.

Отримані результати ілюстровані на прикладі диференціального рівняння другого порядку, що містить у правій частині два доданки: зі степеневою та з експоненціальною нелінійностями[49].

ВИСНОВКИ

Досліджено асимптотичні властивості розв'язків диференціального рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y),$$

в якому $\alpha_i \in \{-1,1\}, p_i\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$; $\varphi_i\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ $(i = \overline{1,m})$, де Δ_{Y_0}– однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними при $i = \overline{1,l}$ і двічі неперервно диференційовними при $i = \overline{l+1,m}$ та задовольняють умови

[49] Колун Н.П. Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різного типу в правій частині. Буков. мат. журн. 2018. Т. 6, № 3–4. С. 89–102.

Колун Н.П. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійнстями різного типу. Наук. вісник Ужгород.

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i},\ i = 1, \dots, l, \textit{для будь}-\textit{якого}\ \lambda > 0,$$

$$\varphi_i'(y) \neq 0, \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\},\ \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1,\ i = l + 1, \dots, m.$$

Із вказаних умов, зокрема, випливає, що при $i = \overline{1, l}$ функції φ_i є правильно змінними при $y \to Y_0$ функціями порядків $\sigma_i \in \mathbb{R}$, а при $i = \overline{l + 1, m}$ – швидко змінними при $y \to Y_0$ функціями.

Предметом дослідження роботи є асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків цього диференціального рівняння. За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків розпадається на чотири неперетинні підмножини в залежності від значень параметра λ_0, а саме

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \lambda_0 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_0 = \pm\infty.$$

Дослідження кожної підмножини $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків у диференціального рівняння, що розглянуто в роботі, проведено за припущенням, що для деякого $s \in \{1, \dots, m\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0\ \textit{при}\ i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}.$$

Ця умова означає, що для таких розв'язків друга похідна еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку з правильно або зі швидко змінною нелінійністю, що дозволило, враховуючи апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, отримати двочленне асимптотичне співвідношення при $t \uparrow \omega$ відносно першої похідної.

Оскільки в правій частині відповідного диференціального рівняння містяться доданки з нелінійностями різного виду, то для кожного з можливих значень параметра λ_0 окремо досліджувався випадок, коли головним в правій частині рівняння є доданок з правильно змінною нелінійністю та випадок, коли головним в правій частині рівняння є доданок зі швидко змінною нелінійністю.

Для диференціального рівняння, що розглядається в роботі, встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків. У кожному з можливих випадків отримано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв’язків рівняння та їх похідних першого порядку. Також вирішено питання про кількість розв’язків зі знайденими асимптотичними при $t \uparrow \omega$ зображеннями.

Отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані для побудови асимптотичної теорії диференціальних рівнянь більш загального виду, які містять у правій частині суму доданків як з правильно, так і зі швидко змінними нелінійностями. Також результати можуть бути використані для встановлення асимптотичних властивостей розв’язків диференціальних рівнянь, що виникають у прикладних задачах науки та техніки.

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена дослідженню асимптотичних властивостей розв’язків диференціального рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y),$$

в якому $\alpha_i \in \{-1,1\}, p_i\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервні функції, $-\infty < a < \omega \le +\infty$; $\varphi_i\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ $(i = \overline{1,m})$, де Δ_{Y_0}– однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними при $i = \overline{1,l}$ і двічі неперервно диференційовними при $i = \overline{l+1,m}$ та задовольняють умови

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i},\ i = 1,\dots,l, \textit{для будь}-\textit{якого}\ \lambda > 0,$$

$$\varphi_i'(y) \ne 0, \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \varphi_i(y) \in \{0,+\infty\},\ \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in Y_0}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1,\ i = l+1,\dots,m.$$

Із вказаних умов, зокрема, випливає, що при $i = \overline{1,l}$ функції φ_i є правильно змінними п $y \to Y_0$ функціями порядків $\sigma_i \in \mathbb{R}$,. а при $i = \overline{l+1,m}$ – швидко змінни при $y \to Y_0$ функціями.

Встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$. – розв’язків цього диференціального рівняння та отримано асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв’язків та їх похідних першого порядку, а також вивчено питання про кількість $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв’язків зі знайденими асимптотичними зображеннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ascoli G. Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine. Rend. R. Ist. Lombardo Sc. Lettere. 1936. V.69. P.167–197.

2. Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations. Pasif. J. Math. 1955. V. 5, № 1. P. 643–647.

3. Belohorec S. Neoscilatorcke riesenia istej nelinearnej differensialnej rovnice druheho radu. Mat. Fuz. Cas. 1962. V. 12, № 4. P. 253–262.

4. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

5. Borel E. Memoir sur les series divergentes. Annales de L'ecole Normale Superiere. 1899. V. 16. P. 9–136.

6. Coffman C.V., Wong J.S.W. On a second order nonlinear oscillation problem. Trans. Amer. Math Soc. 1970. V. 147, № 2. P. 357–366.

7. Evtukhov V.M., Drik N. G. Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation. Georgian Math. J. 1996. V. 3, № 2. P. 101–120.

8. Evtukhov V.M., Kolun N.P. Asymptotic Behaviour of Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi : Georgian Academy of Sciences. 2018. V. 75. P. 105–114.

9. Evtukhov V.M., Shebanina E.V. Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi. 1998. V. 13. P. 150–153.

10. Evtukhov V.M., Vasiljeva N.S. Asimptotic representations of proper nonoscillation solutions of a class semilinear differential equations of the second order. Nonlinear Oscillations. 2001. V. 4, № 2. P. 190–215.

11. Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. Quart. J. Pure Appl. Math. 1914. V. 45. P. 289–350.

12. Hardy G.H. Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 1912. V. (2) 10. P. 451–468.

13. Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. Math. (Cluj) 1930. V. 4. P. 38–53.

14. Kiguradze I.T. On the non-negative non-increasing solutions of nonlinear second order differential equations. Ann. Math. pur. ed. apple. 1969. V. 81. P. 169–192.

15. Kiguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. Arch. Math. (Brno). 1978. V. 14, № 1. P. 21–44.

16. Kiguradze I.T. On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation. Qual. Theory Differ. Equations. Amsterdam e. a. 1981. V. 1. P. 507–554.

17. Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G. On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations. Ann. Math. pura ed appl. 1982. V. 130. P. 67–87.

18. Lindelef E. Sur la croissance des integrales des equations differentielles algebriques du premier ordre. Bull.Soc.Math. France. 1899. V. 27. P. 205–215.

19. Maric V., Tomic M. Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$. Math. Z. 1976. 149. P. 161–166.

20. Maric V.,Tomic M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations. Publ. Inst. Math. 1977. V. 21, № 5. P. 119–129.

21. Maric V. Regular Variation and Differential Equations. Springer – Verlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

22. Polvani G., Ascoli G., Giacomini A. Questioni riguardanti il magnetron. Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. 1936. V. 10. P. 279–338.

23. Taliaferro S.D. On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$. Nonlinear anal. 1978. V. 3. P. 437–444.

24. Taliaferro S.D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$. SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 853–865.

25. Беклемишева Л.А. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, №2. С. 261–264.

26. Беклемишева Л.А. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, близких к каноническим. Вестник МГУ. 1960. Т. 4. С. 26–36.

27. Беклемишева Л.А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Мат. сб. 1962. Т. 56(98), № 2. С. 207–236.

28. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Пер. с англ. А.Д. Мышкиса. Москва : Изд-во иностр. лит. 1954. 216 с.

29. Дрик Н.Г. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае. Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 1071–1072.

30. Дрик Н.Г. Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравений второго порядка: дис.... канд. физ. – мат. наук: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения»; Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1992. 122 с.

31. Евтухов В.М. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Докл. АН СССР. 1977. Т. 233., № 4. С. 531–534.

32. Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 «Дифференциальнiе уравнения» ; Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1980. 154 с.

33. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 473–476.

34. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 «Дифференциальные уравнения» ; Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. 295 с.

35. Евтухов В.М., Васильева Н.С. Условия колеблемости и неколеблемости решений одного класса полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Укр. Мат. Ж. 2007. Т. 59, № 4. С. 458–466.

36. Евтухов В.М., Дрик Н.Г. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 133, № 1. С. 29–32.

37. Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I. Укр. Мат. журнал. 2005. Т. 57, № 3. С. 338–355. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-006-0120-7

38. Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II. Укр. Мат. журнал. 2006. Т. 58, № 7. С. 901–921. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-005-0199-2

39. Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0256-5

40. Евтухов В.М., Колун Н.П. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро

меняющимися нелинейностями. Мат. методы и физ.-мех. поля. 2017. Т. 60, № 1. С. 32–43. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04546-w

41. Евтухов В.М., Колун Н.П. Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка. Нелинейные колебания. 2018. Т. 21, № 3. С. 323–346. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04334-6

42. Евтухов В.М., Колун Н.П. Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. Український математичний вісник. 2018. Т. 15, № 1. С. 18–42. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4055-y

43. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 1. С. 52–80. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-010-0333-7

44. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611105003X

45. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2016. Т. 19, № 4. С. 458–475.

46. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Нелинейные колебания. 2017. Т. 20, № 3. С. 346–360.

47. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 10. С. 1345–1363.

48. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. Укр. мат. журн. 2019. Т. 71, № 1. С. 73–91.

49. Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью. Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 3 . С. 308–322.

50. Изюмова Д.В. Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференц. уравнения. 1966. Т. 11, № 12. С. 1572–1586.

51. Касьянова В.А. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Вісник Чернівецького університету. 2004. Вип. 228, Математика. С. 15–29.

52. Квиникадзе Г.Г., Кигурадзе И.Т. О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 465–468.

53. Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 1. С. 33–36.

54. Кигурадзе И.Т. Заметка об ограниченности решений дифференциальных уравнений. Тр. Тбилис. ун-та. 1965. Т. 110. С. 103–108.

55. Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Докл. АНСССР. 1968. Т. 181, № 5. С. 1054–1057.

56. Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Изв. АНСССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1373–1398.

57. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та. 1975. 372 с.

58. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука. 1990. 430 с.

59. Кириллова Л.А. Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена-Фаулера : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2006. 147 с.

60. Клоков Ю.А. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1958. Т. 80, № 2. С. 189–194.

61. Клопот А.М. Асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2015. 148 с.

62. Колун Н.П. Асимптотика медленно меняющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. Досл. в мат. і мех. 2018. Т. 23, № 2(32). С. 54–67.

63. Колун Н.П. Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різного типу в правій частині. Буков. мат. журн. 2018. Т. 6, № 3–4. С. 89–102.

64. Колун Н.П. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійнстями різного типу. Наук. вісник Ужгород.

65. Костин А.В. О поведении при x → +∞ решений обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами. Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 2. С. 206– 218.

66. Костин А.В. Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена–Фаулера. Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 28–31.

67. Костин А.В., Евтухов В.М. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения. Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 5. С. 1059–1062.

68. Костин А.В. Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 524–526.

69. Костин А.В. Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... докт. физ.-мат. наук : 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». Академия наук Украинской ССР, Институт математики. Киев, 1991. 282 с.

70. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. И.С. Шиганова, под редакцией В.М. Золотарева. Москва : Наука. 1985. 144 с.

71. Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных

уравнений второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2009. 139 с.

72. Чантурия Т.А. О неколеблющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сообщ. АН Грузии. 1969. Т. 55, № 1. С. 17–20.

73. Черникова А. Г. Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. 2015. Т. 20, № 2. С. 56–68.

74. Шинкаренко В.Н. Асимпотические представления решений дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейность. Нелінійні коливання. 2004. Т. 7, № 4. С. 562–573.

75. Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 : «Дифференциальные уравнения». Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса. 2005. 150с.

Information about the authors:
Kolun Nataliia Pavlivna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Lecturer at the Department of Fundamental Sciences
Odesa Military Academy
10, Fontanska doroha str., Odesa, 65009, Ukraine