

## РІВНОВАГА НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ОВАЛЬНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ ПРИ ДІЇ ПОВЕРХНЕВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Рожок Л. С.

### ВСТУП

Циліндричні оболонки – найважливіший елемент конструкцій літаків, ракет, підводних човнів. У будівництві вони знаходять широке застосування в конструкціях будівель, резервуарів, газгольдерів, трубопроводів<sup>1</sup>. При розробці нових конструкцій машин, обладнання, споруд саме на ранніх стадіях проектування, для прийняття проектно-конструкторських рішень, необхідною стає інформація про вплив на напружений стан як конструктивних параметрів, так і властивостей матеріалу, з яких вони виготовлятимуться. Така інформація за відсутності експериментальних даних може бути отримана тільки за допомогою теоретичних моделей. Розробка перспективних видів конструкцій залежить від наявності випереджаючих розробок ефективних засобів математичного моделювання.

Будь-який метод розв'язування математично сформульованих задач у фізичних теоріях має забезпечувати отримання результатів, що кількісно та якісно відображає всі суттєві риси явища, що вивчається. Саме в цьому випадку можна говорити про точний розв'язок задачі. Розрахунки напружено-деформованого стану елементів конструкцій здійснюється на основі сучасних методів, що описуються різними розрахунковими схемами. Суттєвого значення набуває потреба у розробці таких методів розрахунку напружено-деформованого стану оболонок, коли чисельні й аналітичні методи, по можливості, використовуються паралельно, доповнюючи один одного.

Проблема надійності елементів конструкцій висуває на перший план питання про підвищення точності розрахунків, при цьому не останню роль відіграє вибір розрахункової моделі. У зв'язку з цим,

---

<sup>1</sup> Kassegne, S.K., Chun, KS. Buckling characteristic of multi-laminated composite elliptical cylindrical shells. Int J Adv Struct Eng. 2015. No 7, P. 1–10.

проводяться дослідження стосовно подальшого удосконалення моделей деформування та напруженості оболонок та їх реалізація в методах розв'язку конкретних класів задач. Їх розвиток стимулюється, з одного боку, прагненням створити математично коректні моделі оболонок, з іншого – необхідністю з достатнім ступенем точності розв'язати задачу щодо розрахунків елементів конструкції.

Методика розв'язання задачі, що застосовується в даному розділі, базується на використанні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, на основі якого були отримані розв'язки задач лінійної теорії пружності про напружено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом, що має двопараметричне відхилення форми від кругової<sup>2</sup>; у вигляді з'єднаних увігнутих<sup>3</sup> та опуклих<sup>4</sup> напівгофрів в залежності від зміни кривизни поперечного перерізу поверхні відліку, властивостей матеріалу, з яких вони виготовлені, за наявності шарів по товщині при дії рівномірного та локального навантаження.

Останнім часом в будівельній галузі та архітектурі широкого застосування знаходять порожнисті секції еліптичного<sup>5</sup> та овального<sup>6</sup> поперечного перерізу. Використання таких секцій, з одного боку, носить естетичний характер через цікавий і незвичний вигляд, а з іншого – володіючи різною жорсткістю відносно основних осей, дозволяє орієнтувати подібні секції для найбільш ефективного опору навантаженням<sup>7</sup>.

Даний розділ присвячений розв'язанню задачі лінійної теорії пружності про рівновагу нетонких циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом, що знаходяться під дією

---

<sup>2</sup> Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. J. Eng. Math. 2006. Vol. 54. P. 145 – 157.

<sup>3</sup> Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections/ J. Math. Sci. 2018. Vol. 228 No 1. P. 80 – 89.

<sup>4</sup> Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 2014. Vol. 198 No 2. P. 158 – 165.

<sup>5</sup> Silvestre N. Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression. Int. J. of Solids and Structures. 2008. No 45. P. 4427 – 4447.

<sup>6</sup> Gardner L. Structural behaviour of oval hollow sections. Advanced Steel Construction. 2005. Vol. 1. No 2. P. 29 – 54.

<sup>7</sup> Jasion P., Magnucki K. Elastic buckling of Cassini ovaloidal shells under external pressure – theoretical study. Arch. Mech. 2015. Vol.67, No 2. P. 179 – 192.

рівномірного та локального навантаження, за певних граничних умов на торцях, в просторовій постановці. При цьому досліджується вплив на напружено-деформований стан геометричних параметрів оболонок та матеріалу, з яких вони виготовлені та наявності шарів різної жорсткості по товщині.

### 1. Постановка задачі та метод розв'язування

В загальному випадку розглядаються пружні тіла у вигляді нетонких циліндричних оболонок в криволінійній системі координат  $(s, t, \gamma)$ , яку побудовано таким чином: в ортогональній криволінійній системі координат  $(s, t)$  обрано некругову циліндричну поверхню за поверхню відліку, а координата  $\gamma$  відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні<sup>8</sup>. В обраній системі координат квадрат довжини лінійного елемента нетонкої оболонки має вигляд

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 dt^2 + H_3^2 d\gamma^2,$$

де  $H_1 = H_3 = 1$ ,  $H_2 = 1 + [\gamma / R(t)]$  – параметри Ламе;  $R(t) = Rt$  – радіус кривизни напрямної серединної поверхні.

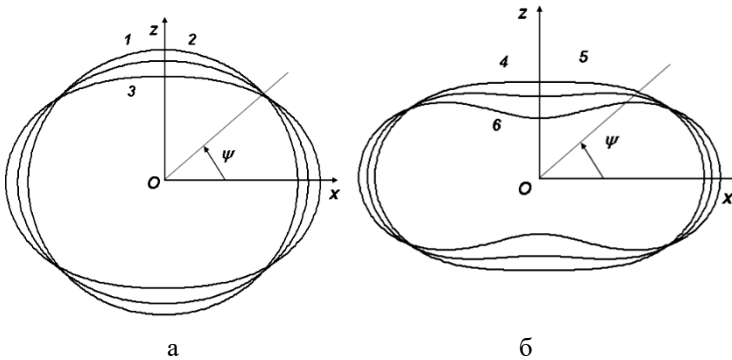


Рис. 1. Поперечний переріз поверхні відліку

За координатну поверхню відліку обрано серединну поверхню оболонки, що рівновіддалена від бічних поверхонь, яка в поперечному перерізі задається рівнянням овалів Касині<sup>9</sup> (рис. 1) у вигляді

<sup>8</sup> Механика композитов. В 12 т. Т. 8. Статика елементов конструкций / Григоренко и др. Киев: «А.С.К.», 1999. С. 196

<sup>9</sup> Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1960. С. 146 – 149.

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\psi + \sqrt{\cos^2 2\psi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

де  $\rho$  – полярний радіус;  $\psi$  – деякий кут в поперечному перерізі ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ );  $c$  – половина відстані між фокусами;  $a$  – добуток відстаней між фокусами та довільною точкою. Відношення параметрів  $c$  та  $a$  дозволяє варіювати формою поперечного перерізу, розглядаючи кругову, еліптичні та овальні форми. Так, при  $c = 0$  маємо кругову форму поперечного перерізу (крива 1, рис. 1, а); при  $0 < c/a < 1/\sqrt{2}$  – еліптичні форми (криві 2, 3 рис. 1, а); при  $1/\sqrt{2} < c/a < 1$  – овальні (криві 4 – 6, рис. 1, б).

Напружено-деформований стан розглядуваних пружних тіл визначається відповідними компонентами переміщень та напружень<sup>10</sup>.

На торцях оболонки розглядаються граничні умови, що відповідають наявності діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої при виході з неї, а саме

$$\sigma_s = 0; \quad u_t = 0; \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = 1. \quad (2)$$

Оболонки знаходяться під дією нормального навантаження, розподіленого уздовж координати  $t$  рівномірно або локально, яке в напрямку твірної змінюється за законом  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$ . У випадку рівномірного навантаження  $q_0 = \text{const}$ , у випадку локального –  $q_0 = q_0(t)$ .

У цьому та в двох наступних параграфах розглядатимемо задачу про напружено-деформований стан циліндричних оболонок, що знаходяться під дією внутрішнього рівномірного тиску, тоді граничні умови на бічних поверхнях мають вигляд (випадок локального навантаження, прикладеного на певному інтервалі зовнішньої поверхні буде розглянутий у параграфі 4)

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1 \\ \sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Для оболонок даного класу, в силу замкненості поперечного перерізу, мають місце умови періодичності вздовж напрямної для всіх факторів напружено-деформованого стану ( $T$  – період)

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma(s, t, \gamma) = \sigma_\gamma(s, t + T, \gamma); \quad \tau_{s_\gamma}(s, t, \gamma) = \tau_{s_\gamma}(s, t + T, \gamma); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \quad u_t(s, t, \gamma) = u_t(s, t + T, \gamma). \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Механика композитов. В 12 т. Т. 8. Статика елементов конструкций / Григоренко и др. Киев: «А.С.К.», 1999. С. 197 – 198.

За основні обрано рівняння просторової лінійної теорії пружності для ізотропного та ортотропного тіла<sup>11</sup>. При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь приймаються такі припущення: напрямна серединної поверхні є довільною неперервною кривою без особливостей і розривів; механічні характеристики можуть бути змінними вздовж товщини, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладеного навантаження може бути заданий довільним чином.

За розв'язувальні прийнято функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (3) – три компоненти напруження  $\sigma_\gamma$ ;  $\tau_{s\gamma}$ ;  $\tau_{t\gamma}$ , а також, три компоненти переміщень  $u_s$ ;  $u_t$ ;  $u_\gamma$ .

З основних рівнянь, після деяких перетворень, отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, що описує тривимірну крайову задачу, яка в області  $0 \leq s \leq l$ ;  $t_1 \leq t \leq t_2$ ;  $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ , має вигляд

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\
 &+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\
 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\
 &- b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s \partial t}; \\
 \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\
 &- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}; \\
 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\
 \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_t
 \end{aligned} \tag{4}$$

<sup>11</sup> Механика композитов. В 12 т. Т. 8. Статика элементов конструкций / Григоренко и др. Киев: «А.С.К.», 1999. С. 197-199.

з граничними умовами (2), (3). Коефіцієнти, що входять до системи рівнянь (4), визначаються через механічні характеристики матеріалу оболонки таким чином:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= a_{22}a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12}a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11}a_{66} / \Omega; \\
 b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) a_{66}; \\
 c_1 &= -(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12}a_{13} + b_{22}a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1a_{13} + c_2a_{23}, \\
 a_{11} &= \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{st}}{E_t} = -\frac{\nu_{ts}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{sy}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{ys}}{E_s}; \\
 a_{22} &= \frac{1}{E_t}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{ty}}{E_t} = -\frac{\nu_{yt}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{ty}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{sy}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{st}},
 \end{aligned}$$

де  $E_s, E_t, E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку осей координат;  $G_{sy}, G_{ty}, G_{st}$  – модулі зсуву;  $\nu_{sy}, \nu_{ty}, \nu_{st}, \nu_{ys}, \nu_{yt}, \nu_{ts}$  – коефіцієнти Пуассона.

Методика розв’язування отриманої тривимірної крайової задачі для системи рівнянь (4) з граничними умовами (2), (3) заснована на використанні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур’є<sup>12</sup> і складається з п’яти етапів.

Для зниження розмірності задачі, в силу граничних умов (2), на першому етапі розв’язування використовується метод відокремлення змінних в напрямку твірної. Для цього компоненти навантаження і розв’язувальні функції подаються у вигляді розвинень в ряди Фур’є за координатою  $s$

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (5)$$

де  $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{ty}, u_t, u_\gamma, q_\gamma\}$ ,  $Y = \{\tau_{sy}, u_s\}$ ,  $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$  ( $0 \leq s \leq l$ )

Після підстановки рядів (5) до розв’язувальної системи рівнянь (4), відповідних граничних умов (3) і відокремлення змінних, тривимірна крайова задача зводиться до двовимірної щодо амплітуд розв’язувальних функцій рядів (5). При цьому, отримана система диференціальних рівнянь, як і вихідна (4), містить в собі члени, що являють собою добутки розв’язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від двох координат (напрявної  $t$  та товщини  $\gamma$ ) і не дозволяють відокремити змінні вздовж напрямної циліндра. Для

<sup>12</sup> Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. 2014. Vol. 50 No 2. P. 105 – 127.

подолання таких перешкод, на другому етапі розв'язування, в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь замість зазначених членів записують доповняльні функції у вигляді (тут і далі індекс  $p$  опущено в позначеннях розв'язувальних функцій і компонент навантаження)

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= \frac{1}{H_2 R_\gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_\gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1,5}) & \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2 R_\gamma} \{ \tau_{t\gamma}; u_t \} \quad (j = \overline{1,2}) \\ \varphi_3^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}) & \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{R_\gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}) \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3 & \varphi_6 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3 & \varphi_7 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь з доповняльними функціями (6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_1^1 + \lambda_n \tau_{t\gamma} - \varphi_4^1 + b_{22} \varphi_1^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_1^4 + b_{22} \varphi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma - \varphi_1^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_1^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_s - b_{66} \varphi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \varphi_3^1 - 2\varphi_2^1 - b_{22} \varphi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_3^3 - b_{22} \varphi_7 - b_{66} \lambda_n^2 u_t; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \varphi_4^2 + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \varphi_1^3; & \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; & \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} &= a_{44} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2, \end{aligned} \quad (7)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= q\gamma; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1 \\ \sigma_\gamma &= 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Формально коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (7) не залежать від координати напрямної  $t$  і дозволяють відокремити змінні в даному напрямку. Для цього, на третьому етапі розв'язування задачі, розв'язувальні, введені доповняльні функції і компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є уздовж координати  $t$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, \gamma) &= \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t; & \tilde{Y}(t, \gamma) &= \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t; \\ \lambda_k &= \frac{2k\pi}{T} \quad (t_1 \leq t \leq t_2); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma \}; \quad \tilde{Y} = \{ \tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7 \}.$$

Після підстановки рядів (9) до розв'язувальної системи рівнянь (7), граничних умови (8) і відокремлення змінних, приходимо до

одномірної крайової задачі щодо амплітуд рядів (9), яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{\sigma\gamma,k} + (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{\sigma\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{\tau\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k}; \quad (10) \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{\sigma\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{\tau\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma,k} &= q\gamma, k; \quad \tau_{\sigma\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\tau\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1 \\ \sigma_{\gamma,k} &= 0; \quad \tau_{\sigma\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\tau\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (11)$$

При розв'язанні деяких класів крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь виникають труднощі при реалізації обчислювального процесу, які обумовлені жорсткістю диференціальних рівнянь, тобто одночасно мають місце розв'язки рівняння, які зростають повільно і дуже швидко. У деяких випадках навіть на комп'ютерах з великим числом значущих цифр не можна отримати надійного результату. Для таких крайових задач метод зведення крайових задач до задачі Коші уже не можна застосувати. В цих випадках пропонуються інші підходи, що дозволяють уникнути зазначених труднощів. Одним із методів, за допомогою якого, можна отримати стійкий обчислювальний процес, є метод дискретної ортогоналізації<sup>13</sup>, який підтвердив свою спроможність численним застосуванням при розв'язуванні задач класу теорії пластин та оболонок.

Таким чином, для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (10), на четвертому етапі розв'язування задачі, використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації одночасно для всіх гармонік розвинень (9). При цьому, оскільки кількість невідомих у розв'язувальній системі (10) перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповняльних

---

<sup>13</sup> Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.



функцій), для замикання отриманої системи рівнянь, на кожному кроці застосування чисельного методу, амплітудні значення доповняльних функцій обчислюються за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій на п'ятому етапі розв'язування задачі, за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є. Для цього в ряді точок напрямної  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, R$ ), при фіксованому значенні координати товщини  $\gamma$ , згідно співвідношень

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_\gamma(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_\gamma(t_i)}{R_\gamma(t_i) + \gamma_k};$$

$$\varphi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \cos \lambda_m t_i \quad (j = \overline{1, 4});$$

$$\varphi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \tau_{r\gamma,m}; u_{t,m} \} \sin \lambda_m t_i \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_{3,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \sin \lambda_m t_i \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\varphi_{4,i}^j = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \tau_{r\gamma,m}; u_{t,m} \} \cos \lambda_m t_i \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{5,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \varphi_{6,i} = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{7,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i$$

будують таблиці значень доповняльних функцій. Використовуючи далі стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею<sup>14</sup>, знаходять ці коефіцієнти і, підставляючи їх до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (10), роблять наступний крок інтегрування. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій знаходять за амплітудними значеннями розв'язувальних функцій згідно граничних умов (11). Слід зауважити, що при збільшенні кількості членів, утримуваних в дискретному ряді Фур'є, він все менше буде

<sup>14</sup> Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва: Наука, 2003. Т. 3. С. 623 – 625.

відрізнятися від звичайного і, таким чином, можна отримати розв'язок задачі з достатнім ступенем точності.

Внаслідок того, що серединну поверхню оболонок в поперечному перерізі задано в полярних координатах  $(\rho, \psi)$ , при переході від координати напрямної  $t$  до координати  $\psi$  (кутова координата в поперечному перерізі) необхідно враховувати відповідний коефіцієнт переходу  $\omega(\gamma)$ . Так, для довільної функції  $V(t(\psi), \gamma)$  маємо

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

Радіус кривизни серединної поверхні обчислюється за формулою

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) / (\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho'').$$

Методика розв'язання задачі, як було зазначено вище, складається з п'яти етапів. Похибка розв'язку виникає на двох останніх етапах за рахунок використання чисельного методу і апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є. Контроль точності отримуваних результатів може бути здійснений за рахунок варіації кількості точок інтегрування та ортогоналізації при застосуванні чисельного методу і за рахунок варіації кількості точок напрямної для побудови табличних значень доповняльних функцій та кількості членів відповідних дискретних рядів Фур'є.

Для оцінки точності отримуваних результатів, розв'язано задачу про напружено-деформований стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом, який описаний рівнянням овалів Касині (1), виготовлених з ортотропного матеріалу при дії внутрішнього тиску.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 40$ , її товщина  $h = 2$ , геометричні параметри поперечного перерізу поверхні відліку  $a = 20$ ,  $c = 12$ ; 16 (криві 3, 5 відповідно, рис. 1).

Для механічних характеристик ортотропного матеріалу обрано<sup>15</sup>:

$$E_s = 3,68 E_0; \quad E_\psi = 2,68 E_0; \quad E_\gamma = 1,1 E_0; \quad \nu_{s\psi} = 0,105; \quad \nu_{s\gamma} = 0,405; \\ \nu_{\psi\gamma} = 0,431; \quad G_{s\psi} = 0,105 E_0; \quad G_{s\gamma} = 0,405 E_0; \quad G_{\psi\gamma} = 0,431 E_0.$$

Тут і надалі усі лінійні розміри та значення переміщень віднесено до одиниці довжини, напруження – до одиничного навантаження.

Результати розв'язання задачі представлено в середньому перерізі довжини оболонки в табл. 1 – табл. 4. У табл. 1, 2 представлено результати оцінки точності отримуваних результатів при застосуванні

---

<sup>15</sup> Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е, Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. с. 64.

чисельного методу дискретної ортогоналізації, в табл. 3, 4 – при апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є.

У табл. 1, 3 представлені значення нормальних переміщень  $u_\psi$ , в табл. 2, 4 – напружень  $\sigma_\psi$  в деяких перерізах товщини. Значення переміщень указано для поверхні відліку ( $\gamma = 0$ ), значення напружень для оболонок з параметром  $c = 12$  (форма № 3) на зовнішній поверхні ( $\gamma = h / 2$ ), а для оболонок з параметром  $c = 16$  (форма № 5) – на внутрішній ( $\gamma = -h / 2$ ), тобто в перерізах, де вони набувають своїх максимальних амплітудних значень.

Таблиця 1

**Оцінка точності отриманих значень нормальних переміщень при застосуванні чисельного методу**

Li	Lo	$u_\psi E_0 / q_0$			
		c = 12		c = 16	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-255,367	841,678	-600,247	3066,88
8	4	-254,360	842,721	-599,232	3067,19
	8	-254,359	842,720	-599,219	3067,09
32	8	-254,356	842,720	-599,228	3067,15
	16	-254,360	842,721	-599,226	3067,12
	32	-254,360	842,721	-599,225	3067,12

Необхідна точність розв'язку крайової задачі досягається за рахунок збільшення числа точок ортогоналізації і при цьому оцінюється його збіжність. З даних, наведених у табл. 1, 2 видно, що точність отримуваних результатів до 5 – 6 знаків має місце при 32 точках інтегрування (Li) та 16 точках ортогоналізації (Lo).

Таблиця 2

**Оцінка точності отриманих значень напружень при застосуванні чисельного методу**

Li	Lo	$\sigma_\psi / q_0$			
		c = 12 ( $\gamma = h / 2$ )		c = 16 ( $\gamma = -h / 2$ )	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-14,3303	26,5745	-4,64614	-92,2256
8	4	-14,2300	27,5761	-4,74678	-92,3335
	8	-14,2299	27,5670	-4,74677	-92,3325
32	8	-14,2298	27,5761	-4,74698	-92,3342
	16	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334
	32	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

Також можна контролювати точність розв'язку при порівнянні результатів розв'язання крайових задач зліва – направо та справа – наліво за рахунок різних обчислювальних схем, де збіг результатів свідчить про точність розв'язку. Задачу було розв'язано в двох напрямках, починаючи з внутрішньої, навантаженої бічної поверхні, та в зворотному напрямку – із зовнішньої, вільної від навантаження. При цьому результати розв'язку для розподілу полів нормальних переміщень та напружень в різних перерізах товщини та напрямної оболонки, для встановленої кількості точок інтегрування  $L_1 = 32$  і ортогоналізації  $L_0 = 16$  співпадали до п'яти – шести знаків.

Практично при розв'язуванні прикладних задач в більшості випадків використовують лише небагато перших членів дискретного ряду Фур'є, тому що коефіцієнти Фур'є швидко спадають, а з ними швидко зменшується вплив далеких гармонік. Вплинути на точність отримуваних результатів при використанні дискретних рядів Фур'є можна збільшуючи кількість точок, в яких обчислюються табличні значення відповідної функції, при цьому має місце покращення точності обчислення коефіцієнтів дискретного по відношенню до звичайного ряду Фур'є<sup>16</sup>.

Нехай, наприклад, функція  $y(x)$  задана на множині точок, тобто  $y(x_i) = y_i$  при  $x_i = i \cdot 2\pi / k$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ). Побудуємо ряд Фур'є для функції  $f(x)$ , що задана на дискретній множині точок  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ). Цей ряд запишемо у вигляді

$$y(x) = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (n \leq k / 2),$$

де коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_m$ ,  $b_m$  обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i; \quad a_m = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cos m \frac{2\pi i}{k}; \quad b_m = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} y_i \sin m \frac{2\pi i}{k} \quad (m \leq k / 2). \quad (12)$$

Знайдемо співвідношення, які пов'язують наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є з точними значеннями коефіцієнтів цього ряду.

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , яка задана на інтервалі  $[0; 2\pi]$  аналітично, і двічі диференційована. Точний ряд Фур'є для цієї функції має вигляд

$$y(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos jx + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin jx.$$

---

<sup>16</sup> Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва: Наука, 2003. Т. 3. С. 624.

Тут великими літерами позначені точні значення коефіцієнтів. Покладаючи при  $x_i = i 2\pi / k$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ ), обчислюємо ті значення функції  $y_i = f(x_i)$ , які утримуються в формулах (12). Підставляючи ці значення  $y_i$  в формули (12), після деяких перетворень дістанемо

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \dots,$$

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \dots \quad (m \leq k / 2).$$

Зокрема, маємо

1) при  $k = 12$ :

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \dots, \quad a_1 = A_1 + A_{11} + \dots, \quad a_2 = A_2 + A_{10} + \dots, \quad a_3 = A_3 + A_9 + \dots;$$

2) при  $k = 24$

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \dots, \quad a_1 = A_1 + A_{23} + \dots, \quad a_2 = A_2 + A_{22} + \dots, \quad a_3 = A_3 + A_{21} + \dots,$$

$$a_4 = A_4 + A_{20} + \dots, \quad a_5 = A_5 + A_{19} + \dots, \quad a_6 = A_6 + A_{18} + \dots, \quad a_7 = A_7 + A_{17} + \dots,$$

$$a_8 = A_8 + A_{16} + \dots, \quad i \text{ т.д.}$$

З цих рівностей видно, що при  $k = 12$  можна враховувати тільки 2–3 гармоніки, а при  $k = 24$  – можна очікувати достатню точність вже для перших 7–8 гармонік.

Таблиця 3

**Оцінка точності отриманих значень нормальних переміщень при апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є**

М	R	$u_{\gamma} E_0 / q_0$			
		c = 12		c = 16	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-90,6204	446,946	6,85213	495,954
	60	-90,6214	446,967	6,85237	495,951
	80	-90,6225	446,987	6,85234	495,950
12	20	-254,579	843,080	-627,839	3103,92
	60	-254,396	842,733	-596,458	3066,04
	80	-254,346	842,727	-596,461	3067,06
17	60	-254,361	842,723	-599,227	3067,14
	80	-254,360	842,721	-599,226	3067,12
	100	-254,360	842,721	-599,226	3067,12

З наведених у табл. 3, 4 даних випливає, що точність отримуваних результатів до 4 – 5 знаків має місце при 80-ти точках (R) напрямної для табличних значень доповняльних функцій і 17 утримуваних членах (M) дискретного ряду Фур'є.

Таблиця 4

**Оцінка точності отриманих значень напружень при апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є**

M	R	$\sigma_{\psi} / q_0$			
		$c = 12 (\gamma = h / 2)$		$c = 16 (\gamma = -h / 2)$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-6,46957	12,9310	-1,37431	-18,8625
	60	-6,46950	12,9318	-1,37410	-18,8624
	80	-6,46948	12,9326	-1,37426	-18,8620
12	20	-14,2410	27,5935	-5,46985	-92,1152
	60	-14,2304	27,5833	-5,02654	-93,4312
	80	-14,2300	27,5756	-5,02659	-92,4316
17	60	-14,2298	27,5760	-4,74677	-92,3332
	80	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334
	100	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

При подальших розрахунках у наступних параграфах будуть враховані 32 точки інтегрування та 16 точок ортогоналізації при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації, а також, 80 точок для обчислення табличних значень доповняльних функцій та 17 членів дискретного та звичайного рядів Фур'є (9) при відповідному розвиненні функцій вздовж координати напрямної.

## **2. Рівновага нетонких циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом при дії рівномірного навантаження**

На основі розглянутого підходу досліджено напружений стан ізотропних та ортотропних<sup>17</sup> циліндричних оболонок, що знаходяться під дією внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ,  $q_0 = \text{const}$ , рівномірного вздовж напрямної.

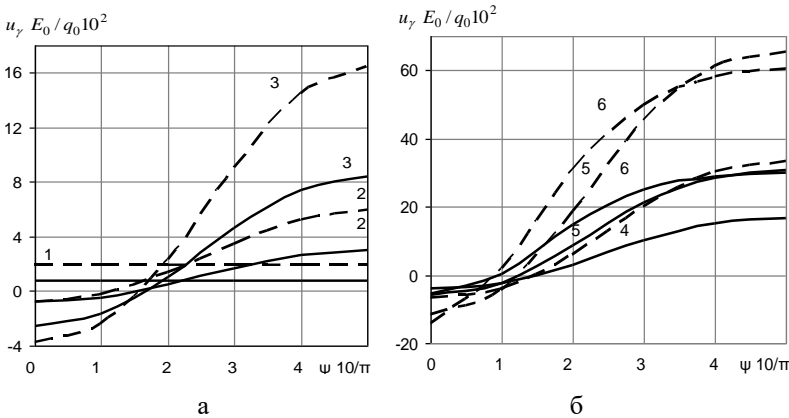
Задачу розв'язано за таких значень геометричних і механічних параметрів: довжина оболонок  $l = 40$ ; їх товщина  $h = 2$ ; параметри поперечного перерізу поверхні відліку  $a = 20$ ,  $c = 0$ ; 8; 12; 14, 14; 16; 18; механічні характеристики для ортотропного матеріалу  $E_s = 3,68 E_0$ ;  $E_{\psi} = 2,68 E_0$ ;  $E_{\gamma} = 1,1 E_0$ ;  $\nu_{\psi} = 0,105$ ;  $\nu_{\gamma} = 0,405$ ;  $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$ ;

<sup>17</sup> Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. 2021. Vol. 57. No 2. P. 160 – 171.

$G_{\psi\psi} = 0,105 E_0$ ;  $G_{\psi\gamma} = 0,405 E_0$ ;  $G_{\psi\gamma} = 0,431 E_0$  і для ізотропного матеріалу: модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Результати розв'язання задачі в середньому перерізі довжини оболонки вздовж напрямної для полів нормальних переміщень  $u_\gamma$  поверхні відліку ( $\gamma = 0$ ) наведені на рис. 2, для напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній ( $\gamma = -h/2$ ) поверхні – на рис. 3 та на зовнішній ( $\gamma = h/2$ ) – на рис. 4.

На графіках (рис. 2 – рис. 4) штриховими лініями позначено криві для ізотропних оболонок, суцільними – для ортотропних. Цифрами 1 – 6 позначено криві, що відповідають різним формам поперечного перерізу оболонок (рис. 1).



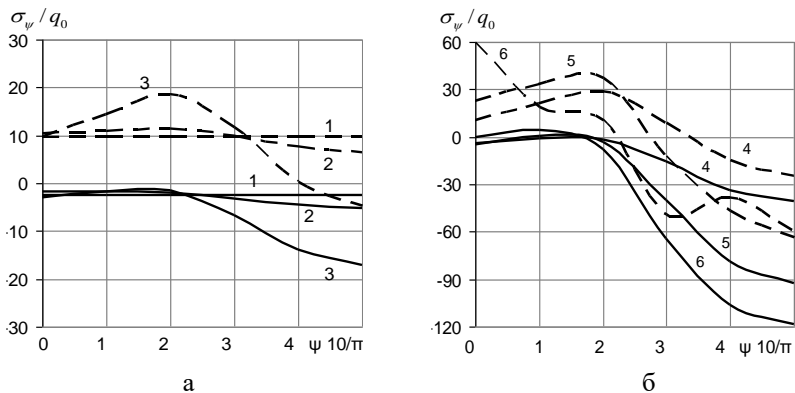
**Рис. 2. Розподіл полів переміщень вздовж напрямної оболонки**

З графіків, наведених на рис. 2 видно, що використання ортотропного матеріалу веде до зменшення максимальної величини нормальних переміщень приблизно в 2 – 2,5 рази для всіх форм поперечних перерізів розглянутих циліндричних оболонок. Відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до перерозподілу величини переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної.

В перерізі  $\psi = \pi/2$  амплітудна величина нормальних переміщень збільшується порівняно з їх величиною в перерізі  $\psi = 0$  в 3,7 рази для оболонок форми № 2; в 3,3 рази – для форми № 3; в 4,1 рази – для форми № 4; в 5 разів – для форми № 5 та в 5,4 рази – для форми № 6. При цьому, максимальна величина переміщень збільшується для оболонок форми № 2 в 4 рази; для форми № 3 – в 11,3 рази; для форми

№ 4 – у 22,5 рази; для форми № 5 – 41,4 рази та для форми № 6 – в 40,4 рази, порівняно з круговими оболонками (форма № 1).

Розподіл напружень уздовж напрямної носить такий характер (рис. 3, рис. 4). Своїх максимальних амплітудних значень напруження  $\sigma_\psi$  для ізотропного матеріалу досягають на зовнішній поверхні, вільній від навантаження, в перерізі  $\psi = \pi / 2$  для форм № 2 – № 5; для форми № 6 – в перерізі  $\psi = 2\pi / 5$ .



**Рис. 3. Розподіл полів напружень вздовж напрямної на внутрішній поверхні оболонки**

При використанні ортотропного матеріалу максимальні амплітудні значення напружень мають місце в перерізі  $\psi = \pi / 2$  для форм № 2 – № 5 на зовнішній, а для форм № 5 і № 6 – на внутрішній, навантаженій поверхні оболонки. При цьому для оболонок форм № 2 – № 4 використання ортотропного матеріалу призводить до зменшення максимальних амплітудних значень приблизно в 1,5 – 1,2 рази і до збільшення – для форм № 5, № 6 в 1,2 – 1,8 рази.

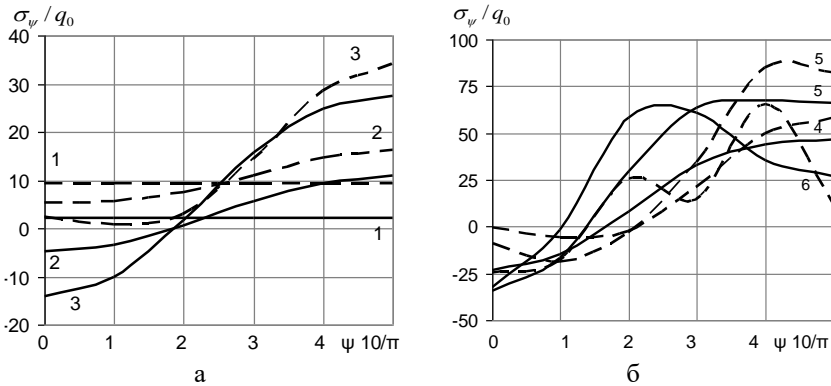
Зі збільшенням відхилення форми поперечного перерізу від кругової посилюється нелінійність в розподілі кривих напружень  $\sigma_\psi$  для оболонок, виготовлених як з ізотропного, так і з ортотропного матеріалу.

На рис. 5 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  вздовж товщини ортотропної циліндричної оболонки з овальним поперечним перерізом в різних перерізах напрямної.

Графіки розподілу напружень для оболонок форми № 2 наведено на рис. 5, а, форми № 3 – на рис. 5, б, форми № 4 – на рис. 5, в, форми № 5 – на рис. 5 г, форми № 6 – на рис. 5, д. Цифрами 1 – 6 позначено



деякі перерізи напрямної інтервалу  $0 \leq \psi \leq \pi/2$  з рівномірним кроком  $\pi/10$ .



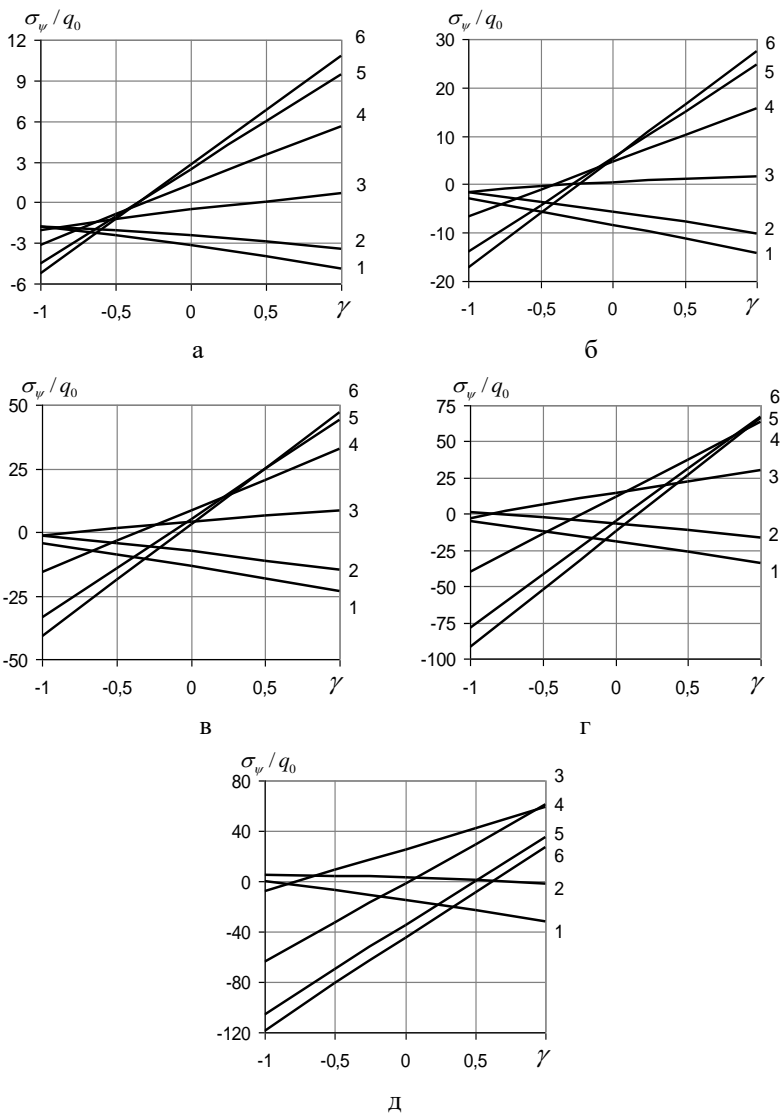
**Рис. 4. Розподіл полів напружень вздовж напрямної на зовнішній поверхні оболонки**

З наведених на рис. 5 графіків видно, що закон розподілу напружень  $\sigma_\psi$  по товщині носить лінійний характер. При цьому на внутрішній поверхні оболонки для прямих 1 – 3 значення напружень мало відрізняються за величиною для всіх форм поперечного перерізу.

Крім того для оболонок форми № 2 (рис. 5, а) аналогічна картина спостерігається і для прямих 4 – 6. Для форми № 5 (рис. 5 г) значення напружень на зовнішній поверхні для прямих 4 – 6 близькі між собою.

В перерізі  $\psi = \pi/2$  (прямі 6) для форми № 4 (рис. 5, в) величини амплітудних значень напружень на зовнішній та внутрішній поверхні практично рівні між собою. Для форм № 2, № 3 (рис. 5, а, б) переважають напруження на зовнішній поверхні, для форм № 5, № 6 – на внутрішній.

Таким чином, варіюючи формою поперечного перерізу, можна впливати на розподіл характеристик напружено-деформованого стану ортотропних циліндричних оболонок з метою вибору більш раціональної форми, придатної для забезпечення міцності і надійності експлуатації у відповідних умовах.



**Рис. 5. Розподіл полів напружень вздовж товщини оболонки**

### 3. Напружений стан шаруватих неоднорідних циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом

Нехай далі, оболонки будуть складені із шарів, що взаємодіють без проковзування та відриву<sup>18</sup>. Напружений стан  $i$ -го шару в обраній системі координат (параграф 1) характеризується величинами  $\sigma_s^i(s, t, \gamma)$ ,  $\sigma_t^i(s, t, \gamma)$ ,  $\sigma_\gamma^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{st}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{ts}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{s\gamma}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{\gamma s}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{t\gamma}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{\gamma t}^i(s, t, \gamma)$ . Згідно з законом парності дотичних напружень, мають місце залежності  $\tau_{st}^i = \tau_{ts}^i$ ,  $\tau_{s\gamma}^i = \tau_{\gamma s}^i$ ,  $\tau_{t\gamma}^i = \tau_{\gamma t}^i$ . Переміщення точок  $i$ -го шару при деформації тіла внаслідок дії прикладеного навантаження характеризується величинами  $u_s^i(s, t, \gamma)$ ,  $u_t^i(s, t, \gamma)$ ,  $u_\gamma^i(s, t, \gamma)$ .

Умови спряження шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{t\gamma}^i &= \tau_{t\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_t^i &= u_t^{i+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

На торцях оболонки розглядаються умови простого обпирання у вигляді

$$\sigma_s^i = u_t^i = u_\gamma^i = 0 \quad \text{при } s = 0; \quad s = l. \quad (14)$$

Оболонки знаходяться під дією внутрішнього тиску. Граничні умови на бічних поверхнях будуть

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^+ &= 0; & \tau_{s\gamma}^+ &= 0; & \tau_{t\gamma}^+ &= 0 & \text{при } \gamma = H / 2; \\ \sigma_\gamma^- &= q_\gamma; & \tau_{s\gamma}^- &= 0; & \tau_{t\gamma}^- &= 0 & \text{при } \gamma = -H / 2. \end{aligned} \quad (15)$$

За розв'язувальні функції, як і в попередньому параграфі, приймаються компоненти напруження і переміщення, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (15) та умови спряження шарів (13).

Послідовність розв'язання задачі для шаруватих оболонок залишається такою самою, як було розглянуто в параграфі 1. Єдина відмінність полягає в тому, що відповідні формули для систем розв'язувальних диференціальних рівнянь, розвинення функцій в ряди Фур'є будуть мати місце для кожного шару оболонки, на що необхідно звертати увагу при застосуванні чисельного методу, враховуючи відповідні механічні характеристики кожного шару.

<sup>18</sup> Рожок Л.С. Напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом. Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р. Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. С. 142 – 146.

Слід зазначити, що чисельне розв'язування задачі здійснюється вздовж товщини оболонки, що звільняє від необхідності задовольняти умови спряження шарів, оскільки вони задовольняються автоматично.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 40$ , її товщина  $H = h_1 + h_2 + h_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ ; параметри поверхні відліку –  $a = 20$ ;  $c = 8$  (еліпс, форма № 2),  $c = 14,14$  (овал, форма № 4),  $c = 16$  (сплюснутий овал, форма № 5).

Механічні параметри: коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль Юнга  $E = E_0 = 1$  для несучих шарів;  $E = dE_0$  – для середнього шару, де  $d = 1; 0,5; 0,1$ .

Результати розв'язування задачі наведені в табл. 5 для значень переміщень  $u_\gamma$  та напружень  $\sigma_\psi$  в середньому перерізі довжини в тих перерізах напрямної, де вони приймають максимальних значень: для переміщень в перерізі  $\psi = \pi/2$  та для напружень в перерізі  $\psi = 3\pi/10$ , на зовнішній ( $\gamma = 2$ ), внутрішній ( $\gamma = -2$ ) та серединній ( $\gamma = 0$ ) поверхнях в залежності від форми поперечного перерізу та жорсткості середнього шару. При  $d = 1$  маємо ізотропну однорідну оболонку.

З наведених у табл. 5 даних випливає, що при відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення переміщень збільшуються в усіх перерізах товщини приблизно у 2,2 – 2,4 рази для значення коефіцієнта  $c = 8$  (форма № 2); у 7 – 8,4 рази для  $c = 14,14$  (форма № 4) і у 10,2 – 12,8 разів для  $c = 16$  (форма № 5) як для однорідної оболонки, так і для оболонок з неоднорідною структурою по товщині. За наявності більш м'якого середнього шару спостерігається збільшення величини максимальних переміщень  $u_\gamma$  в 1,6 – 1,8 рази для  $d = 0,1$  та в 1,2 – 1,3 рази для  $d = 0,5$ , порівняно з однорідною ізотропною оболонкою.

Таблиця 5

**Розподіл переміщень та напружень в залежності від жорсткості середнього шару**

d	$\gamma$	$u_\gamma, E_0 / q_0 (\psi = \pi / 2)$				$\sigma_\psi / q_0 (\psi = 3\pi / 2)$			
		c							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
1	-2	94,29	219,36	745,72	1119,00	4,56	7,16	36,36	70,69
	0	90,57	216,09	747,99	1128,00	4,39	7,21	34,98	66,64
	2	87,20	210,30	735,94	1115,20	4,31	7,35	34,11	63,84
0,1	-2	172,01	382,95	1221,14	1758,43	8,73	13,57	61,43	114,06
	0	163,06	373,15	1217,10	1765,14	0,64	1,11	5,48	10,18
	2	154,71	361,03	1199,34	1751,16	7,57	12,54	54,04	97,26
0,5	-2	125,15	276,94	878,39	1276,52	6,19	9,54	43,91	82,02
	0	120,22	272,42	880,04	1285,78	2,85	4,63	20,89	38,32
	2	115,57	264,88	866,08	1271,91	5,70	9,52	40,79	73,34

Для розподілу максимальних значень напружень  $\sigma_{\psi}$  має місце така картина. При відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, максимальні значення напружень на бічних поверхнях збільшуються приблизно в 1,5 – 1,7 рази для значення коефіцієнта  $c = 8$  (форма № 2); у 7,1 – 8,6 рази для  $c = 14,14$  (форма № 4) і у 12,8 – 15,5 разів для  $c = 16$  (форма № 5) як для однорідної ізотропної оболонки, так і для оболонок з неоднорідною структурою по товщині.

Наявність більш м'якого середнього шару призводить до збільшення величини максимальних напружень  $\sigma_{\psi}$  на бічних поверхнях в 1,7 – 1,9 рази для  $d = 0,1$  та в 1,2 – 1,4 рази для  $d = 0,5$ , в порівнянні з однорідною ізотропною оболонкою.

Таким чином, варіюючи геометричними параметрами та жорсткістю середнього шару, можна впливати на перерозподіл полів переміщень та напружень в тришарових неоднорідних овальних циліндричних оболонках з метою вибору більш раціональної структури та форми їх поперечного перерізу.

#### **4. Рівновага нетонких циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом при дії локального навантаження**

В багатьох застосуваннях разом з рівномірним та нерівномірним навантаженням, що діють на елементи конструкції у вигляді оболонок та оболонкових систем різної товщини, доводиться мати справу з дією локального навантаження, тобто, коли розміри ділянки прикладання навантаження незначні порівняно з загальними розмірами оболонки. Задачі про вплив на оболонку локального навантаження досить складні<sup>19</sup>. Збіжність рядів Фур'є, за допомогою яких апроксимується задане локальне навантаження та шукані величини, може виявитись повільною. Тому для досягнення необхідної точності, потрібно враховувати значну кількість членів рядів.

В загальному випадку розглядаються циліндричні оболонки, що знаходяться під дією локального навантаження  $q_{\gamma} = q_{\gamma}(s, \psi)$ , прикладеного на частині зовнішньої бічної поверхні. Граничні умови (11) для розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь (10) набувають вигляду:

$$\gamma = \gamma_1 : \quad \sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0; \quad (16)$$

$$\gamma = \gamma_2 : \quad \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}(\psi); \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0.$$

---

<sup>19</sup> Даревский В.М. Контактные задачи теории оболочек (Действие локальных нагрузок на оболочку). В кн.: Тр. У1 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин., м. Баку 1966. М.: Наука. 1966. С. 540–551.

Розглянуто варіант прикладання локального навантаження на двох симетричних відносно більшої півосі ділянках бічної поверхні.

Локальне навантаження, прикладене на двох ділянках бічної поверхні має вигляд

$$q_{\gamma}(\psi) = \begin{cases} -q_0 (\cos \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ 0, & \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ q_0 (\cos \psi + \cos \beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases} \quad (17)$$

де  $\psi$  – центральний кут в поперечному перерізі. Таке навантаження можна подати у вигляді ряду Фур'є

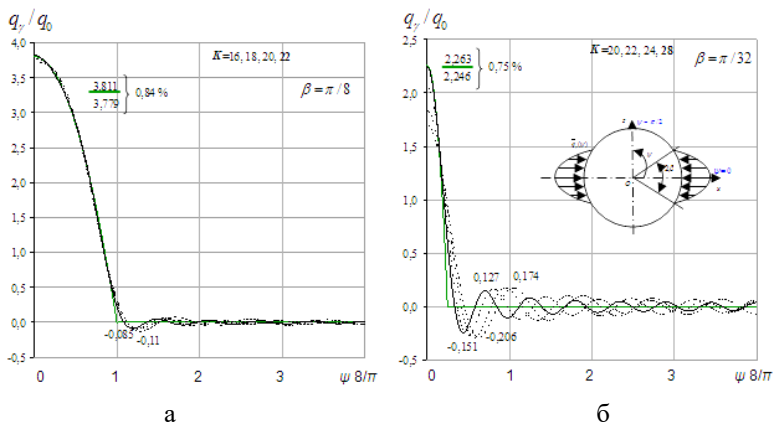
$$q_{\gamma}(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2k} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right] \quad (18)$$

Параметр  $\beta$  характеризує інтервал прикладання локального навантаження.

На рис. 6 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при двох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi / 8$  (рис. 6, а) та  $\beta = \pi / 32$  (рис. 6, б) в області зміни кутового параметра  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ ).

Як видно з наведених на рис. 6 графіків, апроксимоване навантаження потребує врахування відповідної кількості членів ряду (18), яка залежить від довжини його інтервалу. Чим менший інтервал прикладання локального навантаження, тим більшої кількості членів відповідних рядів Фур'є він потребує.

При врахуванні 20 – 22 членів ряду (18) для інтервалу  $\beta = \pi / 8$  максимальне значення навантаження в перерізі  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,84 % – 0,78 %, що свідчить про достатню точність такого подання. Для інтервалу  $\beta = \pi / 32$  при врахуванні 28 членів ряду (18) максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,75 %, що також свідчить про достатню точність такого подання.



**Рис. 6. Локальне навантаження дійсне та апроксимоване рядом Фур'є для двох ділянок прикладання**

З метою оцінки точності отримуваних результатів, розглянемо задачу про напружений стан кругової ізотропної циліндричної оболонки, що знаходиться під дією локального навантаження, прикладеного симетрично в околах одного з діаметрів поперечного перерізу на двох ділянках (17) в залежності від кількості утримуваних членів ряду (18) та інтервалу прикладеного навантаження  $\beta$ .

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус кола поверхні відліку  $r_0 = 40$ , товщина оболонки  $h = 4$ , механічні параметри матеріалу  $E = E_0$ ;  $\nu = 0,3$ .

Результати оцінки точності отримуваних результатів для значень нормальних переміщень  $u_r$ , напружень  $\sigma_r$  та  $\sigma_\theta$  наведено в табл. 5, табл. 6 в залежності від кількості утримуваних членів ряду (18) для двох значень інтервалу прикладеного навантаження  $\beta = \pi/32$ ,  $\beta = \pi/8$ .

Значення нормальних переміщень  $u_r$  наведено на поверхні відліку, а відповідних напружень – на зовнішній поверхні, де прикладене локальне навантаження, в двох перерізах напрямної в зоні максимального значення локального навантаження  $\psi = 0$  та в зоні вільній від навантаження для  $\psi = \pi/2$ .

Як видно з даних, наведених у табл. 6 та табл. 7 на збіжність отримуваних результатів суттєво впливає інтервал прикладеного навантаження  $\beta$ .

Так, якщо для більшого інтервалу  $\beta = \pi / 8$  достатній степінь точності спостерігається вже при 20 – 22 членах ряду (18), то для меншого інтервалу ( $\beta = \pi / 32$ ) необхідно враховувати не менше 28 членів відповідного ряду.

Таблиця 6

**Оцінка точності отримуваних результатів для інтервалу  $\beta = \pi / 8$  локального навантаження**

N	$\psi$	$u\gamma E0 / q0$	$\sigma\psi / q0$	$\sigma s / q0$	Похибка, %
16	0	63,505	0,929	1,262	--
	$\pi/2$	-7,067	-0,092	0,093	
18	0	63,501	0,922	1,256	0,5 – 7,2
	$\pi/2$	-7,071	-0,100	0,087	
20	0	63,512	0,916	1,253	0,2 – 4,4
	$\pi/2$	-7,046	-0,104	0,088	
22	0	63,524	0,913	1,252	0,2 – 3,0
	$\pi/2$	-7,034	-0,107	0,088	
24	0	63,528	0,913	1,254	0,1 – 1,6
	$\pi/2$	-7,036	-0,108	0,086	

Оскільки при дії локального навантаження, для забезпечення заданої точності, необхідно враховувати більшу кількість членів рядів вздовж координати напрямної, то при подальших розрахунках обирається 28 членів дискретного та звичайного рядів Фур'є та 120 точок для побудови табличних значень доповняльних функцій.

Таблиця 7

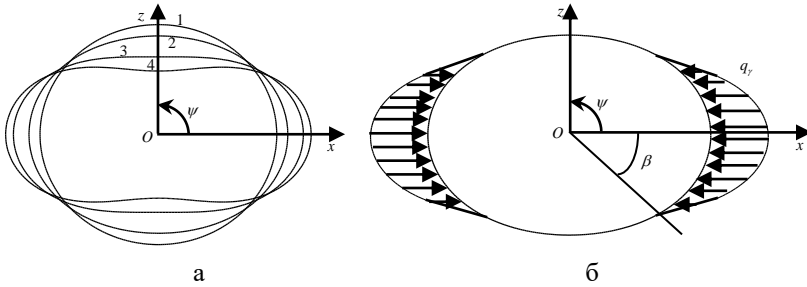
**Оцінка точності отримуваних результатів для інтервалу  $\beta = \pi / 32$  локального навантаження**

N	$\psi$	$u\gamma E0 / q0$	$\sigma\psi / q0$	$\sigma s / q0$	Похибка, %
20	0	79,404	1,218	2,026	--
	$\pi/2$	-4,702	-0,157	0,076	
22	0	79,518	1,243	2,067	0,1 – 8,8
	$\pi/2$	-4,866	-0,150	0,083	
24	0	79,586	1,266	2,099	0,1 – 6,4
	$\pi/2$	-4,799	-0,146	0,089	
28	0	79,622	1,286	2,126	0,01 – 4,0
	$\pi/2$	-4,889	-0,150	0,093	

Розглянемо далі задачу про вплив на напружений стан ізотропних циліндричних оболонки, з овальною формою поперечного перерізу (рис. 7 а), локального навантаження, прикладеного на двох ділянках



у вигляді (17), як показано на рис. 7 б. При розв'язуванні задачі локальне навантаження (17) подається у вигляді ряду Фур'є (18).



**Рис. 7. Поперечний переріз поверхні відліку (а) та зовнішня поверхня з прикладеним локальним навантаженням (б)**

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 80$ , товщина оболонок  $h = 4$ ; параметри поверхні відліку –  $a = 20$ ;  $c = 0$  (коло, форма № 1),  $c = 8$  (еліпс, форма № 2),  $c = 14,14$  (овал, форма № 3),  $c = 16$  (сплюснутий овал, форма № 4). Ділянка прикладеного локального навантаження  $\beta = \pi / 8$ ;  $\beta = \pi / 16$ . Значення сталої навантаження  $q_0$  обирається таким чином, щоб максимальне навантаження було однаковим, як при  $\beta = \pi / 8$ .

Результати розв'язку задачі подано в середньому перерізі довжини у табл. 8 для розподілу полів переміщень  $u_r$  поверхні відліку та у табл.9 для розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної в чотирьох точках інтервалу  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ .

З табл. 8 видно як впливає зміна ділянки прикладання локального навантаження на розподіл переміщень  $u_r$  в залежності від форми поперечного перерізу поверхні відліку.

Так, більш суттєві зміни спостерігаються для оболонок зі сплюснутим овальним поперечним перерізом (форма № 4), порівняно з круговою циліндричною оболонкою (форма № 1). При цьому, абсолютні значення переміщень зменшуються в 1,5 рази для  $\beta = \pi / 16$  та в 1,7 рази для  $\beta = \pi / 8$ .

Таблиця 8

**Розподіл переміщень в залежності від інтервалу  
прикладеного локального навантаження**

$\gamma$	$\psi$	$u, E_0 / q_0$							
		$\beta = \pi / 16$				$\beta = \pi / 8$			
		$c$							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
0	0	50,11	46,39	37,84	33,44	47,08	42,53	32,31	27,24
	$\pi/10$	37,93	31,48	16,69	9,98	36,30	29,58	14,99	8,82
	$3\pi/10$	-14,50	-23,36	-39,41	-41,67	-13,64	-21,64	-34,41	-34,72
	$\pi/2$	-40,15	-43,82	-49,20	-47,12	-38,61	-41,22	-43,31	-39,38

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової, призводить до збільшення жорсткості оболонок в зоні більшої півосі ( $\psi = 0$ ), де мають місце максимальні значення локального навантаження.

Характер розподілу напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від зміни ділянки прикладеного навантаження та варіацій форми поперечного перерізу наведено у табл. 9.

Збільшення інтервалу прикладання навантаження призводить до зменшення величини напружень на внутрішній поверхні оболонки приблизно в 1,1 – 1,3 рази для усіх форм поперечного перерізу оболонок. При цьому, в зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ), спостерігається незначний вплив зміни форми поперечного перерізу на розподіл значень напружень. Так, порівняно з круговою формою поперечного перерізу, напруження зменшуються в 1,2 рази для форми № 2 ( $c = 8$ ), в 1,1 рази для форми № 3 ( $c = 14,14$ ) та змінюються несуттєво для форми № 4 ( $c = 16$ ).

Таблиця 9

**Розподіл напружень в залежності від інтервалу  
прикладеного локального навантаження**

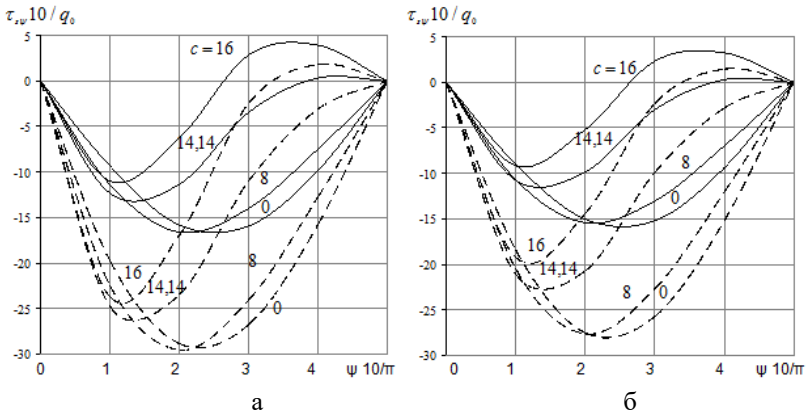
$\gamma$	$\psi$	$10 \sigma_\psi / q_0$							
		$\beta = \pi / 16$				$\beta = \pi / 8$			
		$c$							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
$h/2$	0	-11,62	-11,89	-12,84	-13,40	-9,99	-9,95	-10,05	-10,05
	$\pi/10$	-5,63	-12,99	-17,74	-13,67	-5,62	-12,43	-16,08	-12,10
	$3\pi/10$	4,30	-0,97	-22,43	-32,13	4,25	-0,64	-19,14	-26,21
	$\pi/2$	6,42	5,23	2,17	0,90	6,48	5,27	2,32	1,13
$-h/2$	0	11,49	11,42	11,37	11,18	10,09	9,81	9,21	8,72
	$\pi/10$	6,36	0,21	-5,26	-3,55	6,34	0,51	-4,28	-2,72
	$3\pi/10$	-2,43	-6,75	-22,21	-28,04	-2,39	-6,36	-19,52	-23,46
	$\pi/2$	-4,61	-5,14	-5,89	-4,80	-4,64	-5,04	-5,29	-3,96

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної наведено на рис. 8, де криві на внутрішній поверхні оболонки позначені суцільною лінією, на зовнішній – штриховою лінією.

На рис. 8, *а* наведено графіки напружень  $\tau_{s\psi}$  для інтервалу  $\beta = \pi/16$  прикладання навантаження, а на рис. 8, *б* – для інтервалу  $\beta = \pi/8$ .

З графіків, наведених на рис. 8 видно, що криві дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної для кругової оболонки розподіляються за параболічним законом. Для овальної форми поперечного перерізу параболічний закон порушується і розподіл дотичних напружень набуває хвилястого вигляду.

При цьому, при збільшенні інтервалу локального навантаження, величина дотичних напружень змінюється несуттєво.



**Рис. 8. Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від форми поперечного перерізу**

Перерозподіл величини дотичних напружень спостерігається при зміні форми поперечного перерізу для обох значень інтервалу прикладеного локального навантаження, як на внутрішній, так і на зовнішній поверхні. Крім того, при збільшенні інтервалу локального навантаження, величина дотичних напружень змінюється несуттєво. Максимальних амплітудних значень дотичні напруження набувають на внутрішній поверхні оболонки і їх величина зменшується, порівняно з круговою та еліптичною оболонками.

Так, для  $c = 14,14$  (форма № 3) величина напружень зменшується в 1,3 рази, для  $c = 16$  (форма № 4) – в 1,9 рази при  $\beta = \pi / 8$  та у 1,2 рази для  $c = 14,14$  (форма № 3), в 1,7 рази для  $c = 16$  (форма № 4) при  $\beta = \pi / 16$  порівняно з круговою оболонкою ( $c = 0$ , форма № 1). При цьому у випадку оболонки з еліптичним поперечним перерізом (форма № 2) максимальна амплітудна величина дотичних напружень майже не залежить від інтервалу прикладеного навантаження.

Таким чином, проведений аналіз впливу локального навантаження на напружено-деформований стан циліндричних оболонок для чотирьох форм поперечного перерізу показав, що більш суттєвий перерозподіл полів переміщень та напружень має місце для оболонок з більш вираженою овальною формою (форми № 4, № 5), порівняно з круговою (форма № 1) та еліптичною (форма № 2).

## ВИСНОВКИ

На основі власної розробленої методики та створених програмних комплексів до розв'язання просторових задач лінійної теорії пружності для некругових циліндричних оболонок, що базується на застосуванні ефективних аналітичних методів відокремлення змінних та апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, за допомогою яких, вихідна крайова задача зводиться до одомірної та розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації, побудовано розв'язок задачі про рівновагу циліндричних оболонок, поперечний переріз яких описано за допомогою рівняння овалів Касині, виготовлених з ізотропного та ортотропного матеріалів, що знаходяться під дією прикладеного рівномірного та локального навантаження.

Проведено контроль точності отримуваних результатів при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації й апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Показано, що домогтися достатньої заданої точності можна за рахунок збільшення кількості точок інтегрування і точок ортогоналізації при використанні чисельного методу, а також за рахунок варіації кількості табличних значень доповняльних функцій і відповідної кількості членів дискретних рядів Фур'є. У випадку локального навантаження, встановлена необхідна кількість утримуваних членів рядів Фур'є для забезпечення заданої точності.

Проведено аналіз напружено-деформованого стану циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом, виготовлених з ізотропного і ортотропного матеріалу, за наявності неоднорідних шарів по товщині оболонки при дії рівномірного внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. Показано, що вибір ортотропного матеріалу, зміна жорсткості середнього шару у випадку шаруватих оболонок в поєднанні з вибором форми поперечного перерізу, призводить до істотного перерозподілу показників напружено-деформованого стану розглянутих оболонок. Досліджено вплив локального навантаження та встановлено характерні закономірності розподілу полів переміщень та напружень в оболонках даного класу в залежності від інтервалу прикладеного навантаження.

Отримані результати можуть бути використані при виборі оптимальних структурних, геометричних і механічних параметрів функціональних елементів циліндричних оболонкових конструкцій, або їх елементів, що мають подібну овальну форму поперечного перерізу та знаходяться під дією відповідного навантаження.

## **АНОТАЦІЯ**

На даному етапі розвитку науки і техніки, збільшується кількість конструкцій та їх елементів, виконаних у вигляді оболонок з круговою та некруговою формою поперечного перерізу. Використання конструкцій подібного типу дає змогу задовольнити вимоги, пов'язані зі зменшенням ваги конструкції без зниження її несучої здатності. Саме на етапі проектування конструкцій велику роль відіграють чисельно-аналітичні методи теорії оболонок, оскільки вони дозволяють найбільш просто виявити вплив тих чи інших параметрів та підказати шляхи покращення самої конструкції стосовно підвищення характеристик її міцності.

Для розв'язання задачі про напружено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок при дії поверхневого навантаження використано просторову модель лінійної теорії пружності. Методика розв'язання задачі базується на застосуванні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, що дає змогу отримати розв'язок задачі з достатнім ступенем точності.

Проведено аналіз напруженого стану циліндричних оболонок, поперечний переріз яких описано за допомогою рівняння овалів Касині, що дає змогу дослідити різні форми поперечного перерізу від кругової до «сплюснutoї» овальної за один запуск програмного

комплексу, в залежності від геометричних та механічних параметрів розглянутих оболонок та виду прикладеного навантаження. Виявлено характерні закономірності розподілу характеристик напружено-деформованого стану овальних циліндричних оболонок в залежності від форми поперечного перерізу, наявності неоднорідних шарів по товщині, матеріалу та виду прикладеного навантаження. Результати отримано у вигляді таблиць та графіків розподілу полів переміщень та напружень.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Gardner L. Structural behaviour of oval hollow sections. *Advanced Steel Construction*. 2005. Vol. 1. No 2. P. 29–54. <https://doi.org/10.1016/B978-008044637-0/50075-5>
2. Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. *J. Eng. Math.* 2006. Vol. 54. P. 145–157. <https://doi.org/10.1007/s10665-005-5572-5>
3. Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. *Int. App. Mech.* 2014. Vol. 50 No 2. P. 105–127. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0616-z>
4. Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections. *J. Math. Sci.* 2014. Vol. 198 No 2. P. 158–165. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1780-8>
5. Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections/ *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 228 No 1. P. 80–89. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3607-x>
6. Grigorenko Ya.M. Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. *Int. App. Mech.* 2021. Vol. 57. No 2. P. 160–171. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01070-w>
7. Jasion P., Magnucki K. Elastic buckling of Cassini ovaloidal shells under external pressure – theoretical study. *Arch. Mech.* 2015. Vol. 67, No 2. P. 179–192. <https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v67p179>
8. Kassegne, S.K., Chun, K.S. Buckling characteristic of multi-laminated composite elliptical cylindrical shells. *Int J Adv Struct Eng.* 2015. No 7, P. 1–10. <https://doi.org/10.1007/s40091-014-0074-1>
9. Silvestre N. Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression. *Int. J. of Solids and Structures.* 2008. No 45. P. 4427–4447. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.03.019>

10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.

11. Механика композитов. В 12 т. Т. 8. Статика элементов конструкций / Григоренко и др. Киев: «А.С.К.», 1999. 379 с.

12. Даревский В.М. Контактные задачи теории оболочек (Действие локальных нагрузок на оболочку). В кн.: Тр. У1 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин., м. Баку 1966. Москва : Наука. 1966. С. 540–551.

13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е, Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. 416 с.

14. Рожок Л.С. Напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів з овальним поперечним перерізом // Матеріали VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р. Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2020. 336 с. <http://matan.kpi.ua/public/files/2019/mvstu8/MSTU8.pdf>

15. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1960. 292 с.

16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва: Наука, 2003. Т. 3. 728 с.

#### **Information about the author:**

**Rozhok Liliia Stepanivna,**

Ph.D. in Phys. and Math., Associate Professor,

Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics

National Transport University

1, M. Omelianovycha-Pavlenka str., Kyiv, 01010, Ukraine