CURRENT ISSUES OF MATHEMATICS

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-251-7-1

USING THE STIEFEL METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ШТИФЕЛЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Olefir O. I.
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Statistics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Олефір О. І.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики і статистики
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Tsurkan Yu. R.
Master's Degree Student of The Faculty of Physics and Mathematics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Цуркан Ю. Р.
здобувач освіти другого року за другим (магістерським) рівнем фізико-математичного факультету
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь є одним з центральних понять вищої алгебри. Метод послідовного виключення невідомих, матричний спосіб розв'язання, формули Крамера – досить вживані способи розв'язування систем лінійних рівнянь. Сьогодні цікавим є ще один універсальний метод, що має дуже просту і чітку обчислювальну схему, який дозволяє для системи лінійних рівнянь: розв'язувати та досліджувати системи, знаходити фундаментальні систему розв'язків однорідної системи; знаходити ранг матриці, знаходити обернену матрицю; обчислювати визначники; зводити квадратичну форму до канонічного вигляду тощо. Уперше цей метод був запропонований Е. Штифелем під назвою «Метод жорданового виключення» [1]. Далі, теоретичне обґрунтування та практичне застосування методу можна знайти в роботі М. Н. Шварца [2], де автор запропонував називати новий метод – методом Штифеля.

Нехай (1) $y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ – система векторів n-вимірного лінійного простору $\mathcal{L}$ над полем P, $x_\text{i} \in \mathcal{L}$; $\alpha_i \in P$; $k = \overline{1, m}$; $i = \overline{1, n}$.

Тоді $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основна матриця коефіцієнтів системи (1), яку можемо записати також у вигляді таблиці 1

	x_1	…	x_j	…	$\boldsymbol{x_s}$	…	x_n
y_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…
y_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{is}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{y_r}$	a_{r1}	…	a_{rj}	…	$\boldsymbol{a_{rs}}$	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	….	…	…
y_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

Таблиця 1.

	x_1	x_2	…	x_j	…	$\boldsymbol{y_r}$	…	x_n
y_1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1j}	…	b_{1s}	…	b_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_i	b_{i1}	b_{i2}	…	b_{ij}	…	b_{is}	…	b_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{x_s}$	b_{r1}	b_{r2}	…	b_{rj}	…	$\boldsymbol{b_{rs}}$	…	b_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mj}	…	b_{ms}	…	b_{mn}

Таблиця 2.

яка називається схемою Штифеля системи (1).

Ідея метода Штифеля полягає в наступному. Обираємо елементи α_{rs} такі, щоб $\alpha_{rs} \neq 0$. Тоді в системі (1) з r-го рівняння можна виразити x_s через x_1 , … , x_{r-1} , y_r , x_{r+1} , … , x_n . Підставимо вираз для x_s в інші рівності системи (1), отримуємо нову систему, для якої схема Штифеля буде мати вигляд таблиці 2. Таке перетворення ми будемо називати перенесенням (або перекидуванням) елемента y_r з лівого заголовного стовпчика замість елемента x_s у верхній заголовний стовпчик та навпаки, і позначимо його як (y_r , x_s).

При цьому елемент α_{rs} називається розв'язуючим (або провідним у інших термінах), а рядок і стовпчик, на перетині яких знаходиться елемент α_{rs}, називаються відповідно провідними рядками і стовпчиками.

Тоді для визначення коефіцієнтів b_{rs} справедливим є таке правило:

1. Розв'язуючий коефіцієнт a_{rs} замінюємо оберненим до нього $b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$.
2. Інші елементи провідного рядка ділимо на розв'язуючий коефіцієнт a_{rs}, змінивши знак на протилежний $b_{rj} = -\frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \forall j \neq s$.
3. Інші елементи провідного стовпчика ділимо на розв'язуючий коефіцієнт a_{rs}, тобто $b_{is} = \frac{a_{is}}{a_{rs}}, j \neq r$.
4. Елементи матриці, які не елементами провідного рядка або стовпця, обчислюємо за формулою $b_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \ i \neq r, \ j \neq s$.

Останню формулу легко запам'ятати, якщо записати її через визначник 2-го порядку, який утворюють елементи у «сірих клітинках» таблиці 1.

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{1}{a_{rs}} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Метод Штифеля можна використати і для системи лінійних рівнянь, тоді у таблиця 1 для цього випадку усі елементи заголовного першого стовпчика будуть нулі та з'явиться останній стовпчик, який відповідатиме заголовному елементу -1, що міститиме стовпчик вільних членів системи. У [3] можна знайти алгоритм розв'язування систем методом Штифеля, який реалізований двома способами.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

Розв'язування. Перепишемо систему у вигляді жорданової таблиці

	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	-7
-5	3	2	4	-5	**-5**	14	4
-7	2	-3	**1**	x_3	-2	3	1
-1	-3	4	2	-1	-7	10	2
Табл. 3				Табл. 4			

Перехід від таблиці 3 до таблиці 4 за допомогою розв'язуючого елемента $a_{23} = 1$ дозволяє перекинути -7 у верхній заголовний рядок.

При переході до таблиці 5 оберемо розв’язуючий елемент $a_{11} = 1$, тоді число -5 перекинемо також у верхній заголовний рядок

	-5	x_2	-7		-5	-1	-7
x_1	1/5	14/5	4/5	x_1	5/24	-7/24	-6/24
x_3	2/5	-13/5	3/5	x_3	1/48	13/48	18/48
-1	7/5	**-48/5**	18/5	x_2	7/48	-5/48	-18/48
Табл. 5				Табл. 6			

Виконаємо останнє перекидання елемента зі стовпчика в рядок, оберемо розв’язуючий коефіцієнт $a_{32} = -\dfrac{48}{5}$, отримаємо таблицю 6.

Можливо, такий спосіб розв’язування системи здається досить громіздким ніж метод послідовного виключення розв’язування СЛР, однак це лише питання практичних обчислювальних навичок. Отже, маємо

$$x_1 = -5 \cdot \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + 7 \cdot \frac{6}{24} = 1, \quad x_3 = -5 \cdot \frac{1}{48} - \frac{13}{48} - 7 \cdot \frac{18}{48} = -3,$$

$$x_2 = -5 \cdot \frac{7}{48} + \frac{5}{48} + 7 \cdot \frac{18}{48} = 2.$$

Отже, дійсно, (1, 2, -3) – розв’язок системи.

У проілюстрованому способі розв’язування системи ми працювали зі стовпчиком вільних членів у сенсі роботи з виразами y_i. Але можна згідно з запропонованим вище варіантом застосування методу Штифеля перенести вільні члени у ліву частину рівняння та отримати при цьому додатковий стовпчик схеми.

Література

1. Stiefel E. Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation / Numerische Mathematik, Bd. 2, 1960.
2. Швец М. Н. Метод Штифеля в линейной алгебре, Учебное пособие. – Одесса, 1977. – 69 с.
3. Савастру О. В. Матриці та системи лінійних рівнянь : навч. посіб. / О. В. Савастру, О. М. Яковлєва, С. В. Драганюк, О. М. Болдарєва, під ред. О. В. Савастру. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. – 120 с.