TEACHING METHODS

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-251-7-2

THE THEORY OF LIMITS USED FOR THE CIRCUMFERENCE AND AREA OF A CIRCLE

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ КОЛА І ПЛОЩІ КРУГА

Boldarieva O. M.
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Statistics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Болдарєва О. М.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики і статистики
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Koshevko M. V.
Master's Degree Student of The Faculty of Physics and Mathematics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Кошевко М. В.
здобувач освіти другого року за другим (магістерським) рівнем фізико-математичного факультету
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Коло і круг є непростими випадками з точки зору знаходження формул обчислення їх довжини та площі відповідно. Довжину кола неможливо представити звичним чином за допомогою вибору одиниці довжини, накладання відрізків і встановлення їх кількості [1, с. 138]. Площу круга не є можливим знайти, використовуючи спосіб покривання квадратами, що прийняті за одиницю вимірювання, і його не перетворити у многокутник. Саме тому доречним буде використання теорії границь для обчислення довжини кола і площі круга.

Довжину кола будемо розглядати за допомогою вписаних і описаних у нього многокутників із необмеженим зростанням кількості їх сторін [1, с. 139]. Зрозуміло, що коло є сумою декількох його дуг, менших за півколо. За допомогою деяких допоміжних обчислень легко зрозуміти, що довжина кола більше периметра вписаного в неї многокутника і менше периметра описаного навколо неї многокутника. Звернемо увагу, що зі збільшенням числа сторін величина цього приросту периметрів прямує до нуля, тому самі периметри вписаного і описаного многокутників (позначимо їх p_n та P_n відповідно) при необмеженому збільшенні кількості сторін прямують до деякого постійного числа – границі. Скористаємося теорією границь. Оскільки правильні однойменні многокутники подібні, їх периметри відносяться як радіуси вписаних або описаних кіл (позначимо їх як r та R відповідно):

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{r}.$$

Віднімемо від обох частин дробу число 1 та запишемо це число як відношення периметрів $\frac{p_n}{p_n} = 1$ та радіусів $\frac{r}{r} = 1$:

$$\frac{P_n}{p_n} - \frac{p_n}{p_n} = \frac{R}{r} - \frac{r}{r}.$$

Звідси

$$\frac{P_n - p_n}{p_n} = \frac{R - r}{r}.$$

Отже, маємо що $P_n - p_n = p_n \frac{R-r}{r}$ [1, с. 141]. При необмеженому зростанні кількості сторін многокутників, очевидно, що різниця радіусів $R - r$ прямує до нуля. Величина p_n є змінною, що дорівнює певному числу, тоді добуток також $p_n\,(R - r)$ прямує до нуля. Число r є константою. Отже, ми отримаємо, що весь даний дріб прямує до нуля, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}(P_n - p_n) = 0.$$

Зауважимо, що C міститься між P_n та p_n, різниця яких прагне до нуля при необмеженому збільшенні n. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} p_n = C.$$

Тобто *загальна границя, до якої при необмеженому зростанні числа сторін прямують периметри правильних вписаних і описаних многокутників, є довжиною цього кола*.

З геометрії відомо, що периметри правильних многокутників з однаковою кількістю сторін відносяться, як діаметри кругів, в які вони вписані. Тоді при необмеженому збільшенні числа сторін дані периметри будуть прямувати до границі кола, а, отже, і відношення периметрів до діаметрів будуть прямувати до однакової сталої величини [1, с.142], що заведено позначати через π, тобто

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{2R} = \frac{C}{2R} = \pi$, звідки

$C = 2\pi R$,

тобто *довжина кола дорівнює добутку довжини діаметра на деяку сталу величину, що позначає відношення довжини будь-якого кола до довжини відповідного діаметра*.

Формула площі круга $S_к$ знаходиться аналогічним чином. Логічно знову використати метод вписаних та описаних правильних многокутників і розглянути дану фігуру як загальну границю їх площ s та S із зростаючою довжиною сторін [2]. Очевидно, що

$$s < S_к < S.$$

Площа будь-якого правильного многокутника дорівнює половині добутку його периметра на апофему [2]. Отже, використовуючи поняття границі, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} (S - s) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}P_n \cdot R - \frac{1}{2}p_n \cdot l\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (P_n \cdot R - p_n \cdot l) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (P_n \cdot R - p_n \cdot l + p_n \cdot R - p_n \cdot R) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (R(P_n - p_n) + p_n (R - l)),$$

де R, l є апофемами описаного та вписаного многокутників відповідно.

Вже доведено вище, що послідовність $\{P_n - p_n\}$ є нескінченно малою. Очевидно, що добуток $R(P_n - p_n)$ є нескінченно малим. Добуток $p_n (R - l)$ є також нескінченно малим, а отже такою є і вся сума. Ми отримали, що

$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (R(P_n - p_n) + p_n (R - l)) = 0$, тому

$$\lim_{n\to\infty} (S - s) = 0.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S} = \lim_{n\to\infty} s = S_к.$$

Площа правильного описаного n-кутника дорівнює

$$S = \frac{1}{2}P_n \cdot R$$

Тоді

$$S_к = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} P_n \cdot R.$$

Вище доведено, що периметр правильного описаного многокутника із нескінченним зростанням числа сторін прямує до довжини круга, тому

$$S_к = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} P_n \cdot R = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

Отже, *площа круга дорівнює добутку числа Архімеда на квадрат радіуса*.

Таким чином, задля поставленої мети ми необмежено збільшували кількість сторін і наближалися до потрібної нам фігури.

Зрозуміло, що така аргументація не є доречною при вивченні площі круга або довжини кола у курсі математики закладів ЗСО, однак доведення цих співвідношень за допомогою теорії границь дає нам дивовижну можливість розв'язувати прості цікаві задачі за допомогою нескінченності, не звертаючи увагу на те, що даний підхід є доволі складним для нашого розуміння [3].

Література

1. Лебединцев К. Ф. Преподавание алгебры и начал анализа: пособие для учителей. Киев : Рад. шк., 1984. 248 с.
2. Площа круга // Вікіпедія: вільна енциклопедія. URL: https://bit.ly/3Uhrj9z (дата звернення: 15. 09. 2022).
3. Строґац С. Безмежна сила математики. Як завдяки матаналізу винайшли смартфони, телебачення і GPS / за пер. з англ. А. Дудченко. Київ: Наш формат, 2020. 360 с.

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-251-7-3

CHECKING THE RESULTS OF ARITHMETIC OPERATIONS USING THE THEORY OF CONGRUENCES

ПЕРЕВІРКА РЕЗУЛЬТАТІВ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ КОНГРУЕНЦІЙ

Riabova D. O.
Master's Degree Student of The Faculty of Physics and Mathematics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Boldarieva O. M.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Statistics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Рябова Д. О.
здобувач освіти другого року за другим (магістерським) рівнем фізико-математичного факультету
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Болдарєва О. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Теорія конгруенцій дає зручний спосіб перевірки результатів арифметичних дій. Відомо, що цілі числа a і b називаються