доведення цих співвідношень за допомогою теорії границь дає нам дивовижну можливість розв'язувати прості цікаві задачі за допомогою нескінченності, не звертаючи увагу на те, що даний підхід є доволі складним для нашого розуміння [3].

Література

1. Лебединцев К. Ф. Преподавание алгебры и начал анализа: пособие для учителей. Киев : Рад. шк., 1984. 248 с.
2. Площа круга // Вікіпедія: вільна енциклопедія. URL: https://bit.ly/3Uhrj9z (дата звернення: 15. 09. 2022).
3. Строґац С. Безмежна сила математики. Як завдяки матаналізу винайшли смартфони, телебачення і GPS / за пер. з англ. А. Дудченко. Київ: Наш формат, 2020. 360 с.

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-251-7-3

CHECKING THE RESULTS OF ARITHMETIC OPERATIONS USING THE THEORY OF CONGRUENCES

ПЕРЕВІРКА РЕЗУЛЬТАТІВ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ КОНГРУЕНЦІЙ

Riabova D. O.
Master's Degree Student of The Faculty of Physics and Mathematics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Рябова Д. О.
здобувач освіти другого року за другим (магістерським) рівнем фізико-математичного факультету
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Boldarieva O. M.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Statistics
State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky"
Odesa, Ukraine

Болдарєва О. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики
ДЗ «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
м. Одеса, Україна

Теорія конгруенцій дає зручний спосіб перевірки результатів арифметичних дій. Відомо, що цілі числа a і b називаються конгруентними за модулем $m \in N, m \neq 1$, якщо різниця $a - b$ ділиться на m і позначається як $a \equiv b \pmod{m}$. Це означає, що кожне ціле число N може бути порівняним зі своєю остачею $0 \leq r < m$ при діленні на m, тобто $N \equiv r \pmod{m}$.

Нехай при додаванні цілих чисел N_1 і N_2 отримаємо ціле число N. Якщо додавання виконується правильно, то $N_1 + N_2 = N$.

Якщо за модулем кожне з цих чисел є порівняним зі своєю остачею при діленні на m, тобто $N_1 \equiv r_1 \pmod{m}$, $N_2 \equiv r_2 \pmod{m}$, $N \equiv r \pmod{m}$, тоді згідно з попередньою рівністю для суми має бути $r_1 + r_2 \equiv r \pmod{m}$.

Якщо провести аналогічні міркування (будемо користуватися такими ж позначеннями) для різниці, добутку таких чисел, отримаємо:

– якщо $N_1 - N_2 = N$ тоді $r_1 - r_2 \equiv r \pmod{m}$;

– якщо $N_1 \cdot N_2 = N$,тоді $r_1 \cdot r_2 \equiv r \pmod{m}$;

– якщо $N_1 \cdot N_2 + N_3 = N$ (останнє відношення отримаємо, якщо N при діленні на N_1 дає частку N_2 і остачу N_3), тоді

$$r_1 \cdot r_2 + r_3 \equiv r \pmod{m}.$$

Відношення, які аналогічні вище наведеним, очевидно, можливо узагальнити на всі випадки, коли над числами виконуються в деякій послідовності дії додавання, відніманні і множення [3, с. 159].

Останні чотири порівняння є необхідними умовами правильності виконання арифметичних дій, але, очевидно, не є достатніми.

Використання такого способу перевірки має зміст тоді і тільки тоді, коли перевірка буде виконуватися легко і швидко. Саме тому для цього зазвичай в якості модуля m використовують $m = 9$ або $m = 11$. Вибір таких модулів зумовлений тим, що у перевірці обчислень беруть участь усі цифри конкретного числа. Дійсно, остача числа при діленні на 9 порівняна з остачею суми цифр цього числа при діленні на 9; остача числа при діленні на 11 порівняна з остачею від ділення суми цифр цього числа, взятих позмінно зі знаками «+» або «-» при діленні на 11. Тому ми можем сформулювати способи перевірки арифметичних дій за допомогою «правила 9» і «правила 11» [3, с. 70].

«Правило 9». Кожне число і результати дій замінюємо їх сумою цифр. При цьому вірна рівність переходить у правильну конгруенцію, невірна рівність може перейти у правильну конгруенцію, у випадку, якщо помилка кратна 9.

«Правило 11»: кожне число і результати дій замінюємо їх сумою цифр, взятих справа наліво позмінно зі знаками «+» та «−». При цьому вірна рівність переходить у правильну конгруенції, невірна рівність може перейти у правильну конгруенцію, у випадку, якщо помилка кратна 11.

Існують випадки, коли використовують водночас два способи перевірки арифметичних дій, за допомогою модуля 9, а потім за модулем 11. Даний спосіб є доречним, коли необхідно виконати перевірку масивних та важких обчислень. Якщо помилка буде кратна 99, то вона не буде помічена [2, с. 205].

Приклад 1 [1, с. 125]*:* Перевірити правильність виконання арифметичних дій над цілими числами:

1) $208\,973 + 163\,786 = 372\,759$
2) $387\,912 - 203\,756 = 185\,146$
3) $2\,543 \cdot 783 = 1\,984\,122$
4) $6\,729\,042\,129 : 39\,189 = 171\,707$

Розв'язання. Замінимо рівності (1) – (4) конгруенціями за модулем 9:

1) $2 + 4 \equiv 6 \pmod 9$, або $6 \equiv 6 \pmod 9$;
2) $3 - 5 \equiv 7 \pmod 9$, або $-2 \equiv 7 \pmod 9$;
3) $5 \cdot 9 \equiv 9 \pmod 9$, або $45 \equiv 9 \pmod 9$;
4) Сума цифр діленого $42 \equiv 6 \pmod 9$, дільника $30 \equiv 3 \pmod 9$ і частки $23 \equiv 5 \pmod 9$. Добуток $3 \cdot 5 = 15$ та $15 \equiv 6\ (mod\ 9)$.

Отже, перевірка за «правилом 9» не виявила помилок в жодному із обчислень, але щоб бути впевненими у правильності виконання арифметичних дій, перевіримо ці результати за модулем 11:

1) $5 + (-7) \equiv -13 \pmod{11}$;
2) $-8 + 3 \equiv -5 \pmod{11}$;
3) $-2 \cdot 2 \not\equiv -3 \pmod{11}$;
4) $-19 \cdot (-4) \not\equiv -18 \pmod{11}$.

Отже, «правило 11» показало, що дії у прикладах (3) і (4) виконані невірно, у прикладах (1) і (2) помилки не виявлено, тоді як перевірка виконання арифметичних дій у цих прикладах за правилом 9 помилок взагалі не показала [1, с. 125].

Таким чином, арифметичні дії у прикладах (3) і (4) виконані невірно, у прикладі (1) і (2) можлива помилка, що кратна 9.

Приклад 2: За «правилом дев'ятки» перевірити правильність виконання дій: $\sqrt{73818} = 271^2 + 377$

Розв'язання. Замінимо рівність конгруенцією за модулем 9

$$\sqrt{0} \equiv (-1)^2 + (-1) \pmod 9, \text{або } \sqrt{0} \equiv 0 \pmod 9 \text{ [1, с. 125].}$$

Арифметичні дії у завданні виконані вірно, у прикладі можлива помилка, що кратна 9.

Для учнів закладів загальної середньої освіти можна сформулювати правила перевірки обчислень без використання поняття конгруенції.

Такий підхід для них буде зрозумілим, оскільки він «перекликається» з ознаками подільності на 9 і 11. Ознаки подільності згідно з навчальною програмою вивчають учні у 6 класі, тому на уроках або на факультативних заняттях можна запропонувати таке завдання.

Приклад 3. Перевірити правильність розв'язку (без використання поняття конгруенції):

$$45\,735 - 4028 = 41\,707.$$

Розв'язання. Перед перевіркою правильності виконання цих дій, потрібно нагадати ознаку подільності на 9 (число ділиться на 9, якщо сума цифр цього числа ділиться на 9). Далі можна використати той факт, що кожне ціле число можемо замінити своєю остачею при ділення на обране натуральне m. Знайдемо суму цифр зменшуваного, від'ємника, різниці, отримаємо

$4 + 5 + 7 + 3 + 5 = 24,$ яке можемо при діленні на 9 замінити числом 6,
$4 + 0 + 2 + 8 = 5,$
$4 + 1 + 7 + 0 + 7 = 19$ яке можемо при діленні на 9 замінити числом 1.

Далі з остачами і числом 5 виконуємо ті ж операції, що у вихідній рівності та перевіряємо, чи кратна різниця правої і лівої частин числу 9, $((6 - 5) - 1) \vdots 9 -?$

Дійсно, $0 \vdots 9$, перевірка за «правилом 9» показала, що дія можливо виконана вірно або з помилкою, що кратна 9.

Отже, з можливостями перевірки результатів арифметичних дій за допомогою теорії конгруенцій можна знайомити не тільки здобувачів вищої освіти, але й учнів шкіл на уроках математики або на факультативних заняттях. Здобувачі середньої освіти поглиблять свої знання щодо ознак подільності, і зможуть перевіряти правильність виконання громіздких обчислень під час самостійних або контрольних робіт, чи у побуті.

Література

1. Алгебра и теория чисел: практикум. : навч. посіб. / С. Т. Завало та ін. Киев : Вища шк., 1986. 264 с.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел : навч. посіб. Москва : ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1966. 386 с.
3. Михелович Ш. Х. Теория чисел : навч. посіб. Москва : ВЫСШАЯ ШК., 1967. 338 с.
4. Практикум з теорії чисел. Навчальний посібник / Яковлєва О. М., Перець О. Б., - Одеса : ВМВ, 2015. – 84 с.