

**ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПІДХОДІВ
ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
З УРАХУВАННЯМ КРИВОЛІНІЙНОЇ
АНІЗОТРОПІЇ МАТЕРІАЛУ**

Кагадій Т. С., Щербина І. В.

ВСТУП

В більшості задач механіки досить нечасто виникає можливість отримати точні розв'язки. Це обумовлено наявністю різних нелінійностей, неоднорідностей або складних крайових умов. Тому спеціалісти з прикладної математики звертаються до наближених розв'язків, що побудовані чисельними або аналітичними методами, або завдяки комбінації цих підходів^{1 2 3}. Ключовим моментом при розв'язуванні задачі є побудова математичної моделі, в якій увага може фокусуватись лише на окремих властивостях та питаннях. Вагоме математичне обґрунтування та успішну апробацію мають методи збурень, коли в задачі одна або декілька функцій є малими (або великими). Такі наближення досить точні у випадку, коли величина збурення прямує до нуля (або нескінченності), тобто вони мають характер асимптотичних розв'язків. Вже перше, іноді друге наближення, дають задовільний результат в цілому. Його можна також використати при подальших наближених розрахунках іншими методами, або для перевірки чисельних результатів. Асимптотичний метод, розроблений А.В. Павленко та його учнями на основі ідей Л.І. Маневича, також можна віднести до методів

¹ Д'яченко Н.М. Розв'язання плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за нелінійними законами / Н.М. Д'яченко, В.В. Мухін, В.Ю. Містюк, А.К. Юрченко. *Вісник Запорізького національного університету*. 2018. № 2. С. 29-43. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04.

² Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : монографія Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. 160 с.

³ Максимович О.В. Розрахунок напружень біля штампів, отворів та тріщин у композитних пластинчастих елементах конструкцій : монографія / О.В. Максимович, С.В. Лавренчук, А.Ю. Коцюба. Луцьк : Луцький НТУ, 2018. 132 с.

збурень⁴. На основі цього підходу розв'язані представлені в наступному розділі задачі механіки армованих композитів.

Широке застосування в сучасних конструкціях композиційних матеріалів обумовлене їх унікальними властивостями: високим відношенням міцності до маси, довго тривалістю, стійкістю до ускладнених зовнішніх умов. Широко застосовуються, наприклад, шаруваті пластики, армовані скловолокном. Розглянуті в роботі задачі є адаптованою математичною моделлю багатьох актуальних задач, наприклад, про напружено-деформований стан шахтного вироблення, підкріпленого стержневими конструкціями, або про композиційний матеріал з тонких паралельних високоміцних сталевих дротів, що зміцнюють поліефірні смоли. Визначення міцності таких матеріалів залишається актуальною проблемою механіки деформованого твердого тіла⁵. Результати експериментальних випробувань можуть давати лише часткову картину для конкретного матеріалу, при даній температурі, містять різного роду похибки⁶. В представленій роботі розв'язані плоскі задачі про дослідження напружено-деформованого стану, що виникає при висмикуванні стрижнів арматури з профілю. Враховується ускладнена геометрія пластини.

1. Основні співвідношення та крайові умови у криволінійних координатах

Нехай криволінійно-анізотропна пластинка, що має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну серединній площині xOy займає скінченну або нескінченну область. Пластинка, що працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану, є ортотропною, причому головні напрямки пружності збігаються з криволінійними ізометричними координатами (ξ, η) , що пов'язані з декартовими координатами (x, y) за допомогою деякої функції комплексного змінного

$$x = \operatorname{Re}[\varpi(\zeta)] = x(\xi, \eta); y = \operatorname{Im}[\varpi(\zeta)] = y(\xi, \eta); z = \varpi(\zeta)$$

⁴ Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев-Донецк : Вища школа, 1982, 152 с.

⁵ Гоменюк С.І., Спиця О.Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с.

⁶ Radi, E; Nobili, Frictionless contact problem between a loaded beam and a couple stress elastic half-plane / Radi, E; Nobili, A. (2022). ((Intervento presentato al convegno 11th European Solid Mechanics Conference tenutosi a Galway, Ireland nel 4-8 July 2022. <https://hdl.handle.net/11380/1283441>.

$$(z = x + iy; \zeta = e^{\xi+i\eta}; i = \sqrt{-1}) \quad (1.1)$$

Ізометрична система криволінійних координат на площині має наступну властивість: обидва її параметри Ляме в кожній точці (ξ, η) рівні:

$$H_1 = H_2 = H(\xi, \eta) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Питання про напружено-деформований стан пружної анізотропної пластини зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\Gamma_{22}^2 \tau &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 2\Gamma_{11}^1 \tau &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

за відповідних крайових умов. Передбачається, що межа області, що займає пластина, збігається з лінією $\xi = const$. До рівнянь рівноваги (1.3) слід додати рівняння сумісності деформацій

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 (H^2 e_{12})}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 (H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 (H^2 e_{11})}{\partial \eta^2} + 3\Gamma_{22}^2 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \eta} + \\ + 3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{22})}{\partial \xi} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \xi} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial (H^2 e_{22})}{\partial \eta} - \\ - 2\Gamma_{22}^2 \frac{\partial (H^2 e_{12})}{\partial \xi} - 2\Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{12})}{\partial \eta} - 2H^2 \left[(\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Проекції тензора напруження σ_{11} ; σ_{22} ; τ через компоненти тензора деформацій e_{11} ; e_{22} ; e_{12} визначаються співвідношеннями

$$\sigma_{11} = E_*(e_{11} + \mathcal{A}_1 q e_{22}); \quad \sigma_{22} = E_* q (e_{22} + \mathcal{A}_1 e_{11}); \quad \tau = G e_{12}, \quad (1.5)$$

а компоненти тензора деформацій можна записати через проекції u_1, u_2 вектора переміщень наступним чином:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \Gamma_{22}^2 u_2 \right); \quad e_{22} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 u_1 \right), \\ e_{12} &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \Gamma_{11}^1 u_2 - \Gamma_{22}^2 u_1 \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тут

$$E_* = E_1 t / (1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2); \quad q = E_2 / E_1; \quad \mathcal{A}_2 E_1 = \mathcal{A}_1 E_2; \quad G = G_* t,$$

E_1, E_2 – модулі пружності вздовж головних напрямків (ξ, η) ; t – товщина пластини, ϑ_1, ϑ_2 – коефіцієнти Пуассона; G^* – модуль зсуву; σ_{11} – нормальна компонента напруження при $\xi = const$; σ_{22} – нормальна компонента напруження при $\eta = const$; τ – дотична компонента в обох напрямках. Символи Кристоффеля $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^2$ пов'язані з параметрами Ляме (1.2) наступним чином:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \xi}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

При розв'язанні тих чи інших крайових задач можливі випадки⁷, коли компоненти тензора напруження у всій області, яку займає пластина, задовольняють умовам

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(H^2 \sigma_{11}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(H^2 \sigma_{22}) = 0; \quad \tau = 0, \quad (1.7)$$

тобто дотичні напруження та коваріантна похідна тензора σ_{ij} по координаті η звертаються в нуль.

Для напружено-деформованого стану рівняння рівноваги (1.3) та сумісності деформацій (1.4) приймають такий вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \Gamma_{11}^1(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0; \quad \Gamma_{22}^2(\sigma_{22} + \sigma_{11}) = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - 3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial(H^2 e_{22})}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial(H^2 e_{11})}{\partial \xi} + \\ & + 2H^2 \left[(\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Якщо $\Gamma_{22}^2 \neq 0$, тоді з другого рівняння (1.8) маємо $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$, а з першого рівняння (з урахуванням (1.7)) знаходимо $\sigma_{11} = C/H^2$, $C = const$. При цьому рівняння сумісності (1.9) перетворюється на тотожність лише у випадку $q = 1$. Отже, напружено-деформований стан, що відповідає умовам (1.7), у загальних криволінійних координатах ($\Gamma_{22}^2 \neq 0$) можливий лише за умови рівності модулів пружності вздовж головних напрямків. У цьому випадку розв'язки мають вигляд

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = C/H^2; \quad \tau = 0. \quad (1.10)$$

⁷ Yaylaci M., Abanoz M., Yaylaci E. U., Ölmez H., Sekban D. M., Birinci A. Evaluation of the contact problem of functionally graded layer resting on rigid foundation pressed via rigid punch by analytical and numerical (FEM and MLP) methods / Archive Of Applied Mechanics, 2022 (Sci-Expanded). Doi Numarası: 10.1007/s00419-022-02159-5/

Зазначений стан, очевидно, може реалізуватися у чистому вигляді або входити як складова частина у загальний напружено-деформований стан. Стала C рівності (1.10) визначається з відповідних крайових умов.

Якщо $\Gamma_{22}^2 = 0$ (параметри Ляме не залежать від координати η), то друге рівняння (1.8) перетворюється на тотожність. Напруження σ_{22} виражається через σ_{11} з першого рівняння (1.8), а для визначення напруження σ_{11} необхідно використовувати рівняння сумісності (1.9). У цьому випадку при всіх значеннях q можливий напружено-деформований стан, що відповідає умовам (1.7), але вимоги рівності нулю коваріантних похідних переходять у вимоги рівності нулю частинних похідних, а розв'язок має вигляд

$$\sigma_{11} = A + C/H^2; \quad \sigma_{22} = A - C/H^2; \quad \tau = 0, \quad (1.11)$$

де A та C – довільні сталі.

Така ситуація справедлива для випадку полярних координат, тобто для пластини з циліндричною анізотропією, коли крайові умови та розв'язки не залежать від координати $\eta = \theta$, тобто симетричні щодо осі анізотропії.

Напружено-деформований стан, що відповідає умовам (1.7), називатимемо «квазіосесиметричним».

Якщо граничні умови не задовольняють умовам (1.7), тоді розв'язок основних крайових задач теорії пружності як для пластинки з циліндричною анізотропією, так і для пластинки із загальної криволінійної анізотропією пов'язані зі значними труднощами. Ці проблеми обумовлені, насамперед, неможливістю безпосереднього застосування ефективних методів, заснованих на використанні апарату теорії аналітичних функцій. Для розв'язання таких крайових задач застосуємо асимптотичний метод.

Асимптотичний аналіз основних рівнянь рівноваги для криволінійно-анізотропних середовищ. Виходитимемо з рівнянь рівноваги в переміщеннях. Підставляючи (1.25) до (1.23) з урахуванням (1.6), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{G}{E_*} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + m \frac{G}{E_*} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial \eta} - q f_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + f_1 u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (f_2 u_2) - \\ & - \frac{G}{E_*} \left[f_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - f_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + (f_1 f_2 + f_4) u_2 + (f_2^2 - f_3) u_1 \right] + \\ & + \mathfrak{A} q (f_3 u_1 - f_1 f_2 u_2) = 0, \\ & \frac{G}{E_*} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + q \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + m \frac{G}{E_*} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + q \frac{\partial}{\partial \eta} (f_1 u_1) - f_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + f_2 u_2 \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{G}{E_*} \left[f_2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - f_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + (f_1 f_2 + f_4) u_1 + (f_1^2 + f_3) u_2 \right] - \mathcal{A}_1 q (f_3 u_2 + f_1 f_2 u_1) = 0, \quad (1.12)$$

де $m = 1 + \mu$; $\mu = \mathcal{A}_1 q E_* / G = \mathcal{A}_2 E_* / G$; $f_1(\xi, \eta) = \Gamma_{11}^1$; $f_2(\xi, \eta) = \Gamma_{22}^2$,
 $f_3(\xi, \eta) = \partial f_1 / \partial \xi = -\partial f_2 / \partial \eta$; $f_4(\xi, \eta) = \partial f_1 / \partial \eta = \partial f_2 / \partial \xi$.

Для конструкцій, що широко застосовуються на практиці, характерні наступні три випадки:

$$E_1 = E_2 > G, (q = E_2 / E_1 = 1); \quad E_1 > E_2 \approx G, (q = \lambda_1 G / E_*, \lambda_1 \approx 1)$$

$$E_2 > E_1 \approx G, (q^{-1} = \lambda_2 G / E_*, \lambda_2 \approx 1, E_* = E_2 / (1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2)).$$

Тут величину $\varepsilon = G / E_*$ можна взяти як «малий» параметр при асимптотичному інтегруванні системи (1.12).

Тоді афінні перетворення змінних (1.7) і (1.8) набувають вигляду:

$$\xi_1 = \alpha \xi; \quad \eta_1 = \varepsilon^{-1/2} \eta; \quad u_1 = U^{(1)}; \quad u_2 = \varepsilon^{1/2} V^{(1)}, \quad (1.13)$$

$$\xi_2 = \beta \varepsilon^{-1} \xi; \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1/2} \eta; \quad u_1 = \varepsilon^{3/2} U^{(2)}; \quad u_2 = \varepsilon^{1/2} V^{(2)}. \quad (1.14)$$

Функції $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ ($k=1,2$), аналогічно (1.9) визначаються наступним чином:

$$U^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{k,j}; \quad V^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{k,j}, \quad (k=1,2). \quad (1.15)$$

Коефіцієнти α , β також представимо у вигляді рядів за параметром ε (аналогічно (1.10)). Крім того, припускаємо, що функція $z = \omega(\xi)$ містить параметр ε , тобто параметри Ляме H і функції f_1, f_2, f_3, f_4 можуть бути наступними рядами:

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} h_j, \quad (1.16)$$

$$f_k = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{k,j}, \quad (k=1,2,3,4). \quad (1.17)$$

В іншому випадку всі коефіцієнти при $\varepsilon^{j/2}$ ($j \geq 1$) перетворюються на нуль.

Підставимо (1.13) у (1.12) і використовуємо відповідні розкладання з (1.15)-(1.17). Після розщеплення отриманої системи за параметром $\varepsilon^{1/2}$ отримаємо стан першого типу⁸:

⁸ Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов : монография. Днепропетровск : РИК НГА Украины, 1998. 260 с.

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} &= \sum_{\nu=0}^j (V_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu} + U^{1,\nu} \varphi_{1,j-\nu}) - \\
&- \sum_{\nu=0}^{j-1} [U_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu} + V_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-1} + V^{1,\nu} f_{4,j-\nu-1}] - \\
&- \sum_{\nu=0}^{j-2} [mV_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-2} - V_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} - (\varphi_{2,j-\nu-2} - mf_{3,j-\nu-2}) U^{1,\nu}] - \\
&- \sum_{\nu=0}^{j-3} [V_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-3} - (m\varphi_{12,j-\nu-3} + f_{4,j-\nu-3}) V^{1,\nu}], \tag{1.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V_{\eta}^{1,j} + U^{1,j} f_{1,0})_{\eta} &= \sum_{\nu=0}^{j-1} [U_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-1} - (U^{1,\nu} f_{1,j-\nu})_{\eta}] - \\
&- \sum_{\nu=0}^{j-2} (mU_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-2} + U_{\eta}^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} - V^{1,\nu} \varphi_{2,j-\nu-2}) + \\
&+ \sum_{\nu=0}^{j-3} [U_{\xi}^{1,\nu} A_{j-\nu-3} - (m\varphi_{12,j-\nu-3} + f_{4,j-\nu-3}) U^{1,\nu}] - \\
&- \sum_{\nu=0}^{j-4} [V_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu-4} - (\varphi_{1,j-\nu-4} + mf_{3,j-\nu-4}) V^{1,\nu}] \tag{1.19}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
c_p &= \sum_{s=0}^p \alpha_s \alpha_{p-3}; \quad \varphi_{k,p} = \sum_{s=0}^p f_{k,p-s} f_{k,s} \quad (k=1,2); \quad \varphi_{12,p} = \sum_{s=0}^p f_{1,s} f_{2,p-s}, \\
A_p &= \sum_{s=0}^p \alpha_s f_{2,p-s}.
\end{aligned}$$

Після підстановки (1.14) в (1.12) з використанням відповідних розкладань з (1.15) – (1.17) та розщеплення за параметром $\varepsilon^{1/2}$ отримаємо нескінченну систему рівнянь щодо функцій $U^{2,j}$, $V^{2,j}$ ($j=0,1,\dots$), що визначають розв'язок другого типу:

$$\begin{aligned}
(U_{\xi}^{2,j} + V^{2,j} f_{2,0})_{\xi} &= - \sum_{\nu=0}^{j-1} [U_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + (V^{2,\nu} B_{j-\nu})_{\xi}] + \\
&+ mV_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1} - V_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-1}] - \sum_{\nu=0}^{j-2} V_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-2} + \\
&+ \sum_{\nu=0}^{j-3} V_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3} - U_{\eta\eta}^{2,j-4} + \sum_{\nu=0}^{j-4} [U^{2,\nu} \varphi_{1,j-\nu-4} + \\
&+ (m\varphi_{12,j-\nu-4} + f_{4,j-\nu-4}) V^{2,\nu}] + \sum_{\nu=0}^{j-6} (\varphi_{2,j-\nu-6} - mf_{3,j-\nu-6}) U^{2,\nu}; \tag{1.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = & -\sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + \sum_{\nu=0}^{j-2} \left(U_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-2} + V^{2,\nu} \varphi_{2,j-\nu-2} \right) - \\
& - \sum_{\nu=0}^{j-3} \left(m U_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-3} + U_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3} \right) - \sum_{\nu=0}^{j-4} \left[U^{2,\nu} f_{4,j-\nu-4} - \right. \\
& \left. - U_{\xi}^{2,\nu} B_{j-\nu-4} - \left(\varphi_{1,j-\nu-4} + m f_{3,j-\nu-4} \right) V^{2,\nu} \right] - \\
& - \sum_{\nu=0}^{j-5} U_{\eta}^{2,\nu} f_{1,j-\nu-5} + \sum_{\nu=0}^{j-6} \left(m \varphi_{12,j-\nu-6} + f_{4,j-\nu-6} \right) U^{2,\nu}, \quad (1.21)
\end{aligned}$$

де

$$d_p = \sum_{s=0}^p \beta_s \beta_{p-s}; \quad B_p = \sum_{s=0}^p \beta_s f_{2,p-s}.$$

При $j=0$ (нульове наближення) з рівнянь (1.18) – (1.21) отримаємо напружений стан першого типу

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0; \quad V_{\eta}^{1,0} + U^{1,0} f_{1,0} = 0 \quad (1.22)$$

та напружений стан другого типу

$$U_{\xi}^{2,0} + V^{2,0} f_{2,0} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (1.23)$$

Функції $U^{1,0}$, $V^{2,0}$ визначаються з рівнянь Лапласа, а функції $U^{2,0}$, $V^{1,0}$ виражаються через $U^{1,0}$, $V^{2,0}$ простим інтегруванням.

Коефіцієнти α_j, β_j ($j=1,2,\dots$) у процесі розв'язання будемо вибирати таким чином, щоб рівняння для визначення функцій $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ ($j=1,2,\dots$) відповідали рівнянням (1.22), (1.23). І тут всі функції $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ визначаються з рівнянь Лапласа, тобто будуть гармонійними. Оскільки $U^{2,j}$, $V^{1,j}$ можна виразити з (1.19), (1.20) простим інтегруванням через $U^{1,j}$, $V^{2,j}$, тоді ці функції також будуть гармонійними як частинні інтегралі від гармонійних функцій.

Подібним чином використовуються перетворення (1.13), (1.14) та розкладання (1.15)–(1.17) у виразах для переміщень та напружень. Тоді, аналогічно (1.23), маємо:

$$u_k = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} u_{k,j}; \quad \sigma_{kk} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \sigma_{k,j}; \quad \tau = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \tau_{k,j}, \quad (k=1,2).$$

Після розчеплення за параметром $\varepsilon^{1/2}$:

$$u_{1,j} = U^{1,j} + U^{2,j-3}; \quad \varepsilon^{-1/2} u_{2,j} = V^{1,j} + V^{2,j},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \sigma_{1,\nu} h_{j-\nu} = \sum_{\nu=0}^j U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} + \\
& + \sum_{\nu=0}^{j-1} [U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1} + (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{2,j-\nu-1}] + \\
& + \mu \left(V_{\eta}^{1,j-2} + \sum_{\nu=0}^{j-2} U^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} + V_{\eta}^{2,j-2} \right) + \mu \sum_{\nu=0}^{j-5} U^{2,\nu} f_{1,j-\nu-5}, \\
& \frac{1}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \sigma_{2,\nu} h_{j-\nu} = V_{\eta}^{2,j} + V_{\eta}^{1,j} + \sum_{\nu=0}^j U^{1,\nu} f_{1,j-\nu} + \\
& + \mu \sum_{\nu=0}^{j-2} U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-2} + \sum_{\nu=0}^{j-3} [U^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3} + \mu U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-3} + \mu (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{2,j-\nu-3}], \\
& \frac{\varepsilon^{-1/2}}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \tau_{\nu} h_{j-\nu} = \sum_{\nu=0}^j V_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} + U_{\eta}^{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} U^{1,\nu} f_{2,j-\nu-1} + \\
& + \sum_{\nu=0}^{j-2} [V_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-2} - (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{1,j-\nu-2}] + U_{\eta}^{2,j-3} - \sum_{\nu=0}^{j-4} U^{2,\nu} f_{2,j-\nu-4}. \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Зі співвідношень (1.18)-(1.24) видно, що НДС першого та другого типів пов'язані лише через крайові умови.

Оскільки функції $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ визначаються з рівнянь Лапласа, ефективність методу залежить від того, чи вдасться сформулювати відповідні крайові задачі для знаходження цих основних функцій.

Аналіз граничних умов для криволінійно-анізотропного випадку. У разі першої основної задачі теорії пружності на контурі пластинки Γ ($\xi = const$) відомі нормальні σ_{11} та дотичні τ напруження

$$\sigma_{11} = \psi_1(\eta), \quad \tau = \psi_2(\eta) \quad \text{на } \Gamma \quad (1.25)$$

Припускаємо, що $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$ можуть бути представлені рядами

$$\psi_1(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}; \quad \psi_2(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j} \quad (1.26)$$

(інакше всі коефіцієнти при $\varepsilon^{j/2}$ ($j \geq 1$) перетворюються на нуль). Тоді на контурі Γ напруги $\sigma_{1,j} = \psi_{1,j}$; $\tau_j = \psi_{2,j}$. Далі інтегруємо рівняння напруженого стану першого типу (1.18), (1.19) за наступних крайових умов для функції $U^{1,j}$:

$$U_{\xi}^{1,j} = \frac{1}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{1,\nu} h_{j-\nu} - \sum_{\nu=0}^{j-1} [U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} + U_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + (V^{1,\nu} + V^{2,\nu})f_{2,j-\nu-1}] - \mu \left(V_{\eta}^{1,j-2} + \sum_{\nu=0}^{j-2} U^{1,\nu} f_{1,j-\nu-2} + \right. \\
& \left. + V_{\eta}^{2,j-2} \right) - \mu \sum_{\nu=0}^{j-5} U^{2,\nu} f_{1,j-\nu-5} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.27)
\end{aligned}$$

та рівнянь напруженого стану другого типу (1.20), (1.21) з крайовими умовами для функцій $V_{\xi}^{2,j}$

$$\begin{aligned}
V_{\xi}^{2,j} = & \frac{\varepsilon^{-1/2}}{E_*} \sum_{\nu=0}^j \psi_{2,\nu} h_{j-\nu} - U_{\eta}^{1,j} - \sum_{\nu=0}^{j-1} (V_{\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} - U^{1,\nu} f_{2,j-\nu-1}) - \\
& - \sum_{\nu=0}^{j-2} [V_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu-2} - (V^{1,\nu} + V^{2,\nu}) f_{1,j-\nu-2}] - \\
& - U_{\eta}^{2,j-3} + \sum_{\nu=0}^{j-4} U^{2,\nu} f_{2,j-\nu-4} \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Для другої основної крайової задачі на контурі Γ задані переміщення

$$u_1 = u^0(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} u_j^0; \quad u_2 = v(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} v_j. \quad (1.29)$$

Тоді на контурі Γ переміщення $u_{1,j} = u_j^0$; $u_{2,j} = v_j$ та (1.24) крайові умови для функцій $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ запишуться відповідно

$$U^{1,j} = u_j^0 - U^{2,j-3}; \quad V^{2,j} = \varepsilon^{-1/2} v_j - V^{1,j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

У разі мішаної крайової задачі умови на границях можна розділити на декілька основних випадків.

Зупинимось, наприклад, на аналізі крайових умов контактної задачі про взаємодію твердого тіла (штампу) з пружною анізотропною пластиною. Припускається, що поза областю контакту границя вільна від нормальних і дотичних напружень. В області контакту нормальне переміщення повністю визначається осадкою штампу та формою його межі. Крім того, в області контакту виконується одна з наступних умов:

- а) тертя відсутнє, тобто дотичні напруження дорівнюють нулю;
- б) штамп перебуває у стані граничної рівноваги, тобто у будь-якій точці області контакту абсолютна величина дотичних напружень дорівнює абсолютній величині нормальних напружень, помноженій на коефіцієнт тертя;
- в) штамп зчеплений із пластиною, тобто дотичне переміщення пластинки дорівнює переміщенню штампу;

г) на одних ділянках області контакту має місце зчеплення, на інших – ковзання.

Остання умова є найбільш загальною, всі інші можуть розглядатися як її окремі випадки.

Таким чином, контактна задача в загальному випадку може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги за наступних крайових умов:

- поза зоною контакту $\sigma_{11} = \tau = 0$,
- по всій області контакту $u_1 = u^0(\eta)$,
- на ділянці зчеплення $u_2 = v(\eta)$
- на ділянці ковзання $\tau = \pm \rho \sigma_{11}$.

Крім того, виконуються умови рівноваги штампку та платівки.

Зазначимо, що межі області контакту і ділянки зчеплення, як правило, невідомі і мають бути визначені в ході розв'язання задачі.

Використовуючи (1.27), (1.28), (1.30) отримаємо крайові умови для функцій $U^{1,j}, V^{2,j}$ на відповідних ділянках границі.

Аналіз межових умов показує, що для всіх основних крайових задач ці умови в нульовому наближенні ($j=0$) напруженого стану першого типу не залежать ні від вищих наближень, ні від розв'язків рівнянь напруженого стану другого типу. Тому перше рівняння (1.22) розв'язується незалежно від інших, а розв'язок другого рівняння (1.22) знаходиться простим інтегруванням. Після цього повністю визначаються крайові умови для напруженого стану другого типу, тобто для другого рівняння (1.23). Після його розв'язання та інтегрування першого рівняння з (1.23), визначаються граничні умови для рівняння (1.18) напруженого стану першого типу в наступному першому наближенні ($j=1$).

Отже, розв'язання основних крайових задач зводиться до послідовного інтегрування рівнянь (1.18), (1.19) напруженого стану першого типу та рівнянь (1.20), (1.21) напруженого стану другого типу.

Оскільки коефіцієнти α_j, β_j обираються в такий спосіб, щоб у кожному наближенні рівняння для визначення основних функцій $U^{1,j}, V^{2,j}$ співпадали з рівняннями Лапласа (в найгіршому випадку з рівняннями Пуассона), тоді на кожному етапі процесу та чи інша крайова задачі теорії пружності зводиться до послідовного інтегрування двох крайових задач теорії потенціалу. Це дозволяє застосовувати потужні методи теорії аналітичних функцій, що у поєднанні з методом конформних відображень відкриває нові

перспективи щодо багатьох важливих для практики задач, що виникають у сучасній техніці і не мають ефективного розв'язку.

Зазначимо, що при дослідженні конкретної задачі слід, насамперед, виділити ті розв'язки та крайові умови, що відповідають квазісесиметричному стану, а для інших випадків шукати розв'язки з використанням запропонованого підходу. Повний розв'язок задачі представляється суперпозицією двох розв'язків: квазісесиметричного та знайденого асимптотичним методом.

2. Застосування запропонованого методу до задач про напружено-деформований стан пластин з отворами

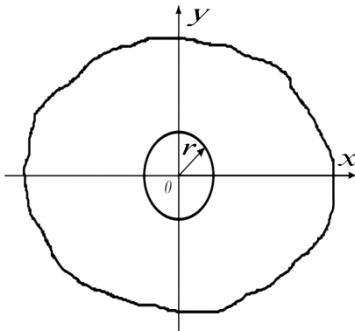


Рис. 2.1

Розглянемо задачу для нескінченної криволінійно-анізотропної пластинки з круговим отвором та прикладеним на ньому періодичним навантаженням.

Нехай пружна нескінченна пластина, що має циліндричну анізотропію, ослаблена круговим отвором радіусу r . Контур отвору Γ навантажений радіальним σ_r и дотичним $\tau_{r\theta}$ напруженнями, на нескінчен-

ності напруження дорівнюють нулю (рис. 2.1). Розв'язання задачі зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги пластини

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

при наступних крайових умовах:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (r=1), \\ \tau_{r\theta} &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (r=1), \\ \sigma_r &\rightarrow 0; \quad \tau_{r\theta} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рівняння рівноваги в полярних координатах задовольняються, якщо ввести функцію напружень $F(r, \theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right).$$

Диференціальне рівняння, якому задовольняє функція напружень, для ортотропної пластини запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + q \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \\ & - (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - q \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (2(1 - \mathcal{G}_r)q + q^{1/2} \varepsilon^{-1/2}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \\ & + q \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де E_θ, E_r – модуль пружності пластини на розтягування-стиск; $G_{r\theta}$ – модуль зсуву; \mathcal{G}_r – коефіцієнт Пуассона; $q = \frac{E_\theta}{E_r}$; $\varepsilon = \frac{G_{r\theta}^2}{E_r E_\theta}$.

Якщо ввести нову незалежну змінну

$r = r_0 e^\rho$ ($r_0 = 1$) $\Rightarrow \rho = \ln r$, рівняння (2.3) запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 F}{\partial \rho^4} - 4 \frac{\partial^3 F}{\partial \rho^3} + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} + (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) \frac{\partial^4 F}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \\ & - 2(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) \frac{\partial^3 F}{\partial \rho \partial \theta^2} + q \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} - q \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + 2q \frac{\partial F}{\partial \rho} + \\ & + (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + 2q \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\rho) \cos n\theta.$$

Для n -го члена ряду маємо звичайне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 f_n}{d\rho^4} - 4 \frac{d^3 f_n}{d\rho^3} + 5 \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} - 2 \frac{df_n}{d\rho} - q \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + 2q \frac{df_n}{d\rho} - \\ & - (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) n^2 \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + 2(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) n^2 \frac{df_n}{d\rho} + q n^4 f_n - \\ & - (q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\mathcal{G}_r q) n^2 f_n - 2q n^2 f_n = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нехай розв'язок останнього рівняння має вигляд:

$$f_n(\rho) = e^{k\rho}. \quad (2.6)$$

Після підстановки (2.6) до (2.5) отримаємо характеристичне рівняння

$$t^2 - \varepsilon^{-1/2} \left[(1+q)\varepsilon^{1/2} + (q^{1/2} - 2\mathcal{D}_r q \varepsilon^{1/2}) n^2 \right] t + q(n^2 - 1)^2 = 0,$$

де $t = (k-1)^2$.

Тоді корені рівняння набувають вигляду:

$$t_1 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\mathcal{D}_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right] - \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\mathcal{D}_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n-1)^2 \varepsilon} \right\},$$

$$t_2 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\mathcal{D}_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\mathcal{D}_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n-1)^2 \varepsilon} \right\}.$$

Отже, $k_1 = 1 - \sqrt{t_1}$; $k_2 = 1 + \sqrt{t_1}$; $k_3 = 1 - \sqrt{t_2}$; $k_4 = 1 + \sqrt{t_2}$.

Після переходу до змінної r розв'язок (2.6) рівняння (2.5) запишеться у вигляді:

$$f_n(r) = C_1 r^{1-\sqrt{t_1}} + C_2 r^{1+\sqrt{t_1}} + C_3 r^{1-\sqrt{t_2}} + C_4 r^{1+\sqrt{t_2}}.$$

Функція напружень $F(r, \theta)$, що задовольняє рівнянню (2.3), запишеться наступним чином:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 r^{1-\sqrt{t_1}} + C_2 r^{1+\sqrt{t_1}} + C_3 r^{1-\sqrt{t_2}} + C_4 r^{1+\sqrt{t_2}}) \cos n\theta.$$

Вирази для напружень мають вигляд:

$$\sigma_r = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} + (n^2 - 1 - \sqrt{t_1}) C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + (n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} + (n^2 - 1 - \sqrt{t_2}) C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \cos n\theta,$$

$$\sigma_\theta = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{t_1} (1 - \sqrt{t_1}) C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} - \sqrt{t_1} (1 + \sqrt{t_1}) C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + \sqrt{t_2} (1 - \sqrt{t_2}) C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} - \sqrt{t_2} (1 + \sqrt{t_2}) C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \cos n\theta,$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & -\sum_{n=0}^{\infty} n \left[\sqrt{t_1} C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} - \sqrt{t_1} C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + \right. \\ & \left. + \sqrt{t_2} C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} - \sqrt{t_2} (1 + \sqrt{t_2}) C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \sin n\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для забезпечення умов на нескінченності при довільних значеннях t_1 та t_2 в розв'язку (2.7) необхідно обрати $C_2 = C_4 = 0$.

Сталі C_1 і C_3 визначаються з першого рівняння (2.2).

Для $n = 0$ напруження у пластині мають вигляд

$$\sigma_r = \frac{A_0}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \sigma_\theta = -\frac{\sqrt{q} A_0}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.8)$$

Для n -го члена розвинення ($n \neq 0$) при $r = 1$ маємо

$$\begin{aligned} A_n = & -\left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) C_1 + (n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) C_3 \right], \\ B_n = & -n \left[\sqrt{t_1} C_1 + \sqrt{t_2} C_3 \right]. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) B_n - n \sqrt{t_2} A_n}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)}, \\ C_3 = & -\frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) B_n - n \sqrt{t_1} A_n}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)}, \end{aligned}$$

а напруження у пластині запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_1})(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) B_n - n \sqrt{t_2} A_n}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) B_n - n \sqrt{t_1} A_n \right]}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \cos n\theta, \\ \sigma_\theta = & -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{t_1} (1 - \sqrt{t_1}) \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) B_n - n \sqrt{t_2} A_n \right]}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{t_2} (1 - \sqrt{t_2}) \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) B_n - n \sqrt{t_1} A_n \right]}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} = & -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{t_1} \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) B_n - n \sqrt{t_2} A_n \right]}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{t_2} \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) B_n - n \sqrt{t_1} A_n \right]}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \sin n\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

У формулі (2.9)

$$t_1 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right] - f(\varepsilon) \right\},$$

$$t_2 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right] + f(\varepsilon) \right\},$$

$$\text{де } f(\varepsilon) = \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n^2-1)^2 \varepsilon}; \quad \mu = 2\vartheta, qn^2.$$

Після розвинення $f(\varepsilon)$ в ряд за степенями $\varepsilon^{1/2}$ розв'язок (2.9) для n -го члена має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \left\{ A_n \left[1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] - B_n q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \left[\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 + 2 \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{n^2} (q^{1/2} - 1) \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+(q\varepsilon)^{1/4} n \left(1 - \frac{1}{n^2} \varepsilon^{1/4} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)}} + \\ & + \left\{ B_n q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \left[\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) + \left(1 + 2 \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{n^2} (q^{1/2} - 1) \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] - \right. \\ & \left. - A_n \left[\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+q^{1/4} n \varepsilon^{-1/4} (1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \cos n\theta, \\ \sigma_\theta = & - \left\{ B_n q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} \left[1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} (1 - q^{-1/2}) \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] - \right. \\ & \left. - A_n q^{1/2} \left[1 + \left(1 - \frac{(q\varepsilon)^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+q^{1/4} n \varepsilon^{-1/4} (1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} + \\ & + \left\{ B_n q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} [\mathcal{O}(\varepsilon)] + A_n q^{1/2} \left[\left(1 - \frac{(q\varepsilon)^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \times \\ & \left. \times \frac{1}{r^{1+(q\varepsilon)^{1/4} n \left(1 - \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)}} \cos n\theta, \right. \\ \tau_{r\theta} = & - \left\{ \left[- A_n q^{1/4} \varepsilon^{1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_n \left[\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+q^{1/4} n^{-1/4} (1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ B_n \left[1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \right] - \right. \\
& \left. - A_n q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+q^{1/4} n \varepsilon^{-1/4} (1+O(\varepsilon))}} \sin n\theta. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Отриманий точний розв'язок поставленої задачі можна використовувати при дослідженні окремих випадків.

Розглянемо нескінченну пластину, що має криволінійну анізотропію. Пластина ослаблена круговим отвором одиничного радіусу, що обмежений простим гладким замкнутим контуром Γ (рис. 2.2).

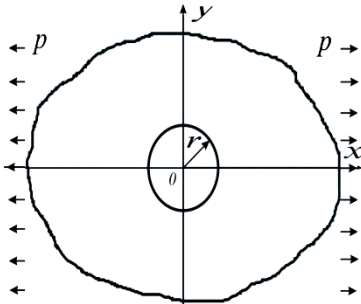


Рис. 2.2.

Розглянемо першу основну задачу, коли контур Γ отвору вільний від зовнішніх зусиль, а на нескінченності діють зусилля інтенсивності p , що розтягують пластину (задача Кірша). Пластина має у кожній точці площину пружної симетрії, паралельну серединній площині XOY . У суцільній пластині без отвору

$$\sigma_x^0 = p; \quad \sigma_y^0 = 0; \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (2.11)$$

Введемо полярну систему координат r, θ . Якщо скористатися формулами перетворення

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta;$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau \sin 2\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta,$$

то за умов (2.11) отримаємо, що в суцільній пластині без отвору

$$\sigma_r^0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^0 = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^0 = -\frac{p}{2} \sin 2\theta. \quad (2.12)$$

Контур отвору вільний від нормальних (σ_r) і дотичних ($\tau_{r\theta}$) напружень, тоді утворення у пластині отвору рівносильне прикладанню до точок уявного контуру напружень

$$\sigma_r = -\sigma_r^0; \quad \tau_{r\theta} = -\tau_{r\theta}^0.$$

Дія напружень σ_r і $\tau_{r\theta}$ призводить до виникнення другого поля напружень, що визначається з розв'язання задачі, розглянутої вище.

Загальний розв'язок поставленої задачі складається із суми розв'язку (2.2) та зазначеного другого поля напружень, що необхідно визначити. Для розглянутого випадку різов'язок (2.8) (при $n=0$ $A_0 = -\frac{p}{2}$) набуває вигляду:

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} \frac{1}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \sigma_\theta = \frac{p}{2} \frac{\sqrt{q}}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.13)$$

Для $n \neq 0$ усі A_n та B_n , крім A_2 та B_2 , дорівнюють нулю, а

$$A_2 = -\frac{p}{2}; \quad B_2 = \frac{p}{2},$$

тому розв'язок (2.9) запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p}{2} \left[\frac{(3+\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \frac{(3+\sqrt{t_2})(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= -\frac{p}{2} \left[\frac{\sqrt{t_1}(1-\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \frac{\sqrt{t_2}(1-\sqrt{t_2})(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left[\frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_2}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_1}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де

$$\begin{aligned} t_1 &= \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[2q^{1/2} + \frac{1}{2}(1+q-8g_2q)\varepsilon^{1/2} \right] - f_*(\varepsilon) \right\}, \\ t_2 &= \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[2q^{1/2} + \frac{1}{2}(1+q-8g_2q)\varepsilon^{1/2} \right] + f_*(\varepsilon) \right\}, \\ f_*(\varepsilon) &= \sqrt{\left[2q^{1/2} + \frac{1}{2}(1+q-8g_2q)\varepsilon^{1/2} \right]^2 - 9q\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язання задачі про одновісне розтягування пластини з циліндричною анізотропією у разі отвору одиничного радіусу має вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) + \frac{p}{2} \left[1 - \frac{(3+\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3+\sqrt{t_2})(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{q}}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) - \frac{p}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{t_1}(1-\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} + \right. \end{aligned}$$

$$\tau_{r,\theta} = -\frac{p}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_2}-1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} - \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_1}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta + \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_2}-1)(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \cos 2\theta - \frac{p}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_2}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_1}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} \right] \sin 2\theta. \quad (2.15)$$

В окремому випадку ізотропної пластини, тобто при

$$q = 1; \quad \varepsilon = \frac{(1-\mathcal{G})^2}{4}; \quad \varepsilon^{1/2} = \frac{1-\mathcal{G}}{2}; \quad \left(G = \frac{E}{2(1+\mathcal{G})} \right),$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = 9$$

розв'язок (2.5) переходить у відоме рішення задачі Кірша для ізотропної пластини, коли радіус отвору дорівнює одиниці.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r,\theta} &= -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Якщо скористатися розкладанням в ряд (2.10) з урахуванням того, що всі A_n і B_n , окрім A_2 та B_2 , дорівнюють нулю, тоді розв'язок (2.15) задачі Кірша $\left(A_2 = -\frac{p}{2}; B_2 = \frac{p}{2} \right)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) + \frac{p}{2} \left[1 - \left\{ \left(1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \right. \right. \\ &+ q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \left. \left(\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) + \left(1 + 2 \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} + \frac{1}{n^2} (q^{1/2} - 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \right\} \times \\ &\times \frac{1}{r^{1+q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} n} \left(1 - \frac{1}{n^2} \varepsilon^{1/4} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)} + \left\{ q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \left(\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left(1 + 2 \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{n^2} (q^{1/2} - 1) \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \left. \left(\left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right\} \times \\ &\times \frac{1}{r^{1+q^{1/4} n \varepsilon^{-1/4} (1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \left. \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{q^{1/2}}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) - \frac{p}{2} \left[1 + \left\{ q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} (\mathcal{O}(\varepsilon)) - q^{1/2} \left(\left(1 - \frac{(q\varepsilon)^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right\} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{r^{1+(q\varepsilon)^{1/4}n\left(1-\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)}} + \left\{ q^{1/4} \varepsilon^{-1/4} \left(1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} (1 - q^{-1/2}) \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \right. \\
& \left. + q^{1/2} \left(1 + \left(1 - \frac{(q\varepsilon)^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right\} \frac{1}{r^{1+(q\varepsilon)^{1/4}n\left(1-\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)}} \cos 2\theta, \\
\tau_{r\theta} = & -\frac{P}{2} \left(1 + \left\{ q^{1/4} \varepsilon^{1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] + \left[1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right] \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \right) \times \\
& \times \frac{1}{r^{1+(q\varepsilon)^{1/4}n\left(1-\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)}} - \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{q^{1/4} \varepsilon^{-1/4}}{n} \right) \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] + \right. \\
& \left. + q^{1/4} \varepsilon^{1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+q^{1/4}n\varepsilon^{-1/4}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \sin 2\theta. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

У випадку ізотропної пластини при $q = 0,28$ $\varepsilon = 0,1296$ розв'язок (2.17) запишеться таким чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{P}{2} \left[1 - \left\{ (1 + 1,83\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon^{1/4} (1,83 + 2,66\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right\} \frac{1}{r^{1+1,2(1-0,7\varepsilon^{1/2}+\mathcal{O}(\varepsilon))}} + \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon^{1/4} (1,83 + 2,66\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) + (1,83\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right\} \frac{1}{r^{1+1,2\varepsilon^{-1/2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \right] \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta = & \frac{P}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{P}{2} \left[1 + \left\{ \varepsilon^{-1/4} (\mathcal{O}(\varepsilon)) - q^{1/2} (0,17\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right\} \times \right. \\
& \times \frac{1}{r^{1+1,2(1-0,7\varepsilon^{1/2}+\mathcal{O}(\varepsilon))}} + \left\{ \varepsilon^{-1/4} (1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) + (1 + 0,17\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right\} \times \\
& \left. \times \frac{1}{r^{1+1,2\varepsilon^{-1/2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \right] \cos 2\theta, \\
\tau_{r\theta} = & -\frac{P}{2} \left(1 + \left\{ \varepsilon^{1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] + [1,83\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)] \right\} \times \right. \\
& \times \frac{1}{r^{1+1,2(1-0,7\varepsilon^{1/2}+\mathcal{O}(\varepsilon))}} - \left\{ [1 + 1,83\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon)] + \right. \\
& \left. + \varepsilon^{1/4} \left[1 + \varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \right\} \frac{1}{r^{1+1,2\varepsilon^{-1/2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))}} \right) \sin 2\theta. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Далі буде приведений розв'язок цієї ж задачі про одновісне розтягнення криволінійно анізотропної пластини асимптотичним методом.

Оскільки головні напрями пружності збігаються з криволінійними координатами $\xi; \eta$, функція комплексного змінного $z = \varpi(\zeta)$ зі співвідношення (1. 1) має бути обрана таким чином, щоб одиничне коло $\xi = 0$ на площині ζ відображалось на криву Γ площини z , а область ззовні одиничного кола γ на – область z поза отвором.

$$\text{В цьому випадку } \varpi(\zeta) = \zeta; x = e^{\xi} \cos \eta; y = e^{\xi} \sin \eta; H = e^{\xi}, \\ \cos \theta = \cos \eta; \sin \theta = \sin \eta.$$

Тоді в суцільній пластині із співвідношень (2.12) ($\sigma_r^0 \rightarrow \sigma_{11}^0, \sigma_{\theta}^0 \rightarrow \sigma_{11}^0, \tau_r^0 \rightarrow \tau^0$) маємо:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\eta, \sigma_{22}^0 = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\eta, \tau^0 = -\frac{p}{2} \sin 2\eta. \quad (2.19)$$

Для визначення другого поля напружень крайові умови мають вигляд:

$$\sigma_{11} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\eta; \tau = \frac{p}{2} \sin 2\eta, (\xi = 0); \\ \sigma_{11} \rightarrow 0; \tau \rightarrow 0, (\xi \rightarrow \infty),$$

а осесиметричний розв'язок запишеться таким чином:

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\frac{p}{2} e^{-2\xi}; \tau = 0. \quad (2.20)$$

Залишається розв'язати задачу за наступних крайових умов:

$$\sigma_{11} = -\frac{p}{2} \cos 2\eta; \tau = \frac{p}{2} \sin 2\eta, (\xi = 0); \sigma_{11} \rightarrow 0; \tau \rightarrow 0, (\xi \rightarrow \infty).$$

Для цього використовуються результати, отримані у п. 1. У цьому випадку $f_1 = 1, f_2 = f_3 = f_4 = 0$, тобто $h_0 = e^{\xi}; f_{1,0} = 1$, а усі інші $h_j, f_{1,j} (j \geq 1)$, а також $f_{2,j}, f_{3,j}, f_{4,j} (j \geq 0)$ у формулах (1.17) дорівнюють нулю.

Маємо: $\psi_{1,0} = -\frac{p}{2} \cos 2\eta; \psi_{2,0} = \frac{p}{2} \sin 2\eta$, а всі інші $\psi_{1,j}; \psi_{2,j} (j \geq 1)$ в рядах (1.26) також дорівнюють нулю.

На кожному етапі інтегруються рівняння (1.18) та (1.19) з крайовими умовами для функцій $U^{1,j} (j = 0,1,\dots)$ та рівняння (1.20) та (1.21) з крайовими умовами для функцій $V^{2,j} (j = 0,1,\dots)$.

Напружено-деформований стан (НДС) першого типу:

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0; \quad V_{\eta}^{1,0} + U^{1,0} = 0, \quad U_{\xi}^{1,0} = -\frac{1}{E} \frac{p}{2} \cos \eta_1 \quad (\xi_1 = 0), \quad (2.21)$$

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = -2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,0}; \quad V_{\eta}^{1,1} + U^{1,1} = 0, \\ U_{\xi}^{1,1} = -\alpha_1 U_{\xi}^{1,0} - U_{\xi}^{2,0} (\xi_1 = 0), \quad (2.22)$$

$$U_{\xi\xi}^{1,2} + U_{\eta\eta}^{1,2} = -(2\alpha_2 + \alpha_1^2) U_{\xi\xi}^{1,0} - 2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,1} - m U_{\xi}^{1,0} - U^{1,0} - m V_{\xi\eta}^{1,0} + V_{\eta}^{1,0}, \\ V_{\eta}^{1,2} + U^{1,2} = -m U_{\xi}^{1,0} - U^{1,0}, \\ U_{\xi}^{1,2} = -\alpha_2 U_{\xi}^{1,0} - \alpha_1 U_{\xi}^{1,1} - \beta_1 U_{\xi}^{2,0} - U_{\xi}^{2,1} - (m-1) V_{\eta}^{2,0} (\xi_1 = 0). \quad (2.23)$$

Напружено-деформований стан (НДС) другого типу:

$$U_{\xi}^{2,0} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} = 0, \quad V_{\xi}^{2,0} = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} \sin \eta_2 - U_{\eta}^{1,0} \quad (\xi_2 = 0), \quad (2.24)$$

$$U_{\xi}^{2,1} = -m V_{\eta}^{2,0} + \int V_{\eta}^{2,0} d\xi_2, \quad V_{\xi\xi}^{2,1} + V_{\eta\eta}^{2,1} = -2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,0}, \\ V_{\xi}^{2,1} = -U_{\eta}^{1,1} - \beta_1 V_{\xi}^{2,0} \quad (\xi_2 = 0), \quad (2.25)$$

$$U_{\xi}^{2,2} = -\beta_1 \int V_{\eta}^{2,0} d\xi_2 - \beta_1 U_{\xi}^{2,1} - m V_{\eta}^{2,1} + \int V_{\eta}^{2,1} d\xi_2, \\ V_{\xi\xi}^{2,2} + V_{\eta\eta}^{2,2} = -(2\beta_2 + \beta_1^2) V_{\xi\xi}^{2,0} - 2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,1}, \\ V_{\xi}^{2,2} = -U_{\eta}^{1,2} - \beta_2 V_{\xi}^{2,0} - \beta_1 V_{\xi}^{2,1} - V_{\xi}^{1,0} + V^{1,0} + V^{2,0} \quad (\xi_2 = 0). \quad (2.26)$$

Аналогічно будуються наступні наближення. Усі функції $U_{\xi}^{1,j}; V_{\xi}^{2,j}$ ($j = 0, 1, \dots$) на нескінченності прямують до нуля. З виразів (2.21) – (2.26) видно, що рівняння другого типу кожного з наближень інтегруються після розв'язання відповідних рівнянь першого типу.

Функція $U^{1,0}$ може бути визначена із задачі Неймана для нескінченної області з круговим отвором одиничного радіусу в комплексній площині $\zeta_1 = e^{\xi_1 + i\eta_1}$, тобто

$$U^{1,0} = \frac{1}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \cos \eta_1. \quad (2.27)$$

Після розв'язання другого рівняння (2.21), знаходиться компонента

$$V^{1,0} = -\frac{1}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \sin \eta_1.$$

З формули (2.17) отримаємо крайові умови на контурі отвору ($\xi = \xi_1 = \xi_2 = 0$) для знаходження функції $V^{2,0}$ другого рівняння (2.24)

$$V_{\xi}^{2,0} = -\frac{1 + \varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \sin \eta_2 \quad (\xi_2 = 0).$$

Тут маємо задачу Неймана в комплексній площині $\zeta_2 = e^{\xi_2 + i\eta_2}$, розв'язок якої запишеться наступним чином:

$$V^{2,0} = -\frac{1 + \varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_2} \sin \eta_2.$$

З першого рівняння (2.24) отримаємо $U_{\xi}^{2,0} = 0$.

На цьому розв'язання задачі у нульовому наближенні завершується. Напруження у зазначеному наближенні визначаються з формул (1.24) при $h_0 = e^{-\xi}$ і в розглянутому випадку наступні:

$$\sigma_{1,0} = E e^{-\xi} U_{\xi}^{1,0}; \quad \sigma_{2,0} = E e^{-\xi} V_{\eta}^{2,0}, \quad \tau_0 = E e^{-\xi} \varepsilon^{1/2} (V_{\xi}^{2,0} + U_{\eta}^{1,0}). \quad (2.28)$$

Знаходження розв'язків у вищих наближеннях є завданням тієї ж складності, що у нульовому наближенні. Продовжуючи процес, отримаємо розв'язки поставленої задачі у формі ряду за ступенями параметра ε :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{1,0} + \varepsilon \sigma_{1,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \sigma_{22} &= \sigma_{2,0} + \varepsilon \sigma_{2,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \tau &= \tau_0 + \varepsilon \tau_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Повний розв'язок задачі про одновісне розтягування криволінійно-анізотропної пластинки, що послаблена круговим отвором, складається з суми розв'язків (2.29), (2.30) і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{p}{2} (1 - e^{-2\xi}) + \frac{p}{2} \left\{ 1 - e^{-\xi} - \varepsilon (1 + \varepsilon^{-1/2}) (e^{-(1-\varepsilon)\xi} - e^{-\xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \cos 2\eta, \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{2} (1 + e^{-2\xi}) - \frac{p}{2} \left\{ 1 + (1 + \varepsilon^{-1/2}) e^{-(1+\varepsilon^{-1})\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left((1 + \varepsilon^{-1/2}) e^{-(1+\varepsilon^{-1})\xi} - e^{-(1-\varepsilon)\xi} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \cos 2\eta, \\ \tau &= -\frac{p}{2} \left\{ 1 - \varepsilon^{1/2} \left[(1 + \varepsilon^{-1/2}) e^{-(1+\varepsilon^{-1})\xi} - e^{-\xi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon (1 + \varepsilon^{-1/2}) (e^{-(1+\varepsilon^{-1})\xi} - e^{-(1-\varepsilon)\xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \right\} \sin 2\eta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тут враховано, що $\eta_1 = \eta_2$; $\xi_1 = \alpha \xi$; $\xi_2 = \beta \varepsilon^{-1} \xi$, $\alpha = 1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$; $\beta = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

У вихідних позначеннях (при $r_0 = 1$, $e^{\xi} = r$, $\eta = \theta$) розв'язок (2.30) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{r} - \varepsilon \left(1 + \varepsilon^{-1/2} \right) \left(\frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}} - \frac{1}{r} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left\{ 1 + \left(1 + \varepsilon^{-1/2} \right) \frac{1}{r^{(1+\varepsilon)}} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left(\left(1 + \varepsilon^{-1/2} \right) \frac{1}{r^{(1+\varepsilon)}} - \frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \cos 2\theta, \\
\tau_r &= -\frac{p}{2} \left\{ 1 - \varepsilon^{1/2} \left[\left(1 + \varepsilon^{-1/2} \right) \frac{1}{r^{(1+\varepsilon)}} - \frac{1}{r} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon \left(1 + \varepsilon^{-1/2} \right) \left(\frac{1}{r^{(1+\varepsilon)}} - \frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \right\} \sin 2\theta. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Формули (2.30) є першими членами розкладання точного розв'язку в ряд за ступенями ε . Для ізотропної пластини, враховуючи, що $q=1$ отриманий асимптотичним методом розв'язок (2.30) переходить у знайдений раніше точний розв'язок (2.10) розкладений за параметром ε .

В окремому випадку ізотропної пластини маємо:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{2,1}{r^{2,2}} + \frac{1,1}{r^{4,32}} \right) \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{2,67}{r^{4,32}} \right) \cos 2\theta, \\
\tau_r &= -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{0,6}{r^{2,2}} - \frac{1,6}{r^{4,32}} \right) \sin 2\theta.
\end{aligned}$$

На контурі отвору криволінійно-анізотропної пластини напруження будуть наступними:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_r = 0, \quad \sigma_\theta = p - \frac{p}{2} \left[\left(2 + \varepsilon^{-1/2} \right) + \varepsilon \left(\varepsilon^{-1/2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \cos 2\theta.$$

$$\text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\sigma_\theta)_{\max} = p + \frac{p}{2} \left[\left(2 + \varepsilon^{-1/2} \right) + \varepsilon \left(\varepsilon^{-1/2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right].$$

Якщо у виразах (2.30) обмежитися нульовим наближенням, то порівняння результатів (таблиця 1) з відомими максимальними напруженнями на контурі отвору дає похибку при обчисленні $(\sigma_\theta)_{\max}$, що не перевищує 1% (при $\varepsilon=1/4$) і буде менше 0,3% (при $\varepsilon=1/9$).

**Порівняння асимптотичного та точного розв'язків
для максимального напруження на контурі отвору**

ε	Відомий розв'язок	Отриманий точний розв'язок	Отриманий асимптотичний розв'язок	Похибка
1/3 (випадок ізотропії)	3р	3р	2,85 р	$\approx 5\%$
1/4	–	3,22р	3,25р	$\approx 0,93\%$
1/9	–	3,658р	3,667р	$\approx 0,24\%$

Навіть у найнесприятливішому, з погляду застосовуваного методу, випадку ізотропної пластини (параметр ε має максимальне значення) похибка наближення не перевищує 5% при $\varrho = 0.3$ (ϱ – коефіцієнт Пуассона)

**3. Задачі про передачу навантаження від підкріплюючого
елемента до пластини**

Контактна задача для стрижня та напівнескінченної ортотропної пластини з циліндричною анізотропією.

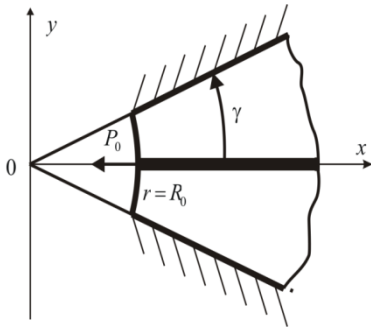


Рис. 3.1

Нехай пружна пластинка $R_0 \leq r < \infty$, $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ товщини t закріплена по кромках $\theta = \pm \gamma$.

Межа $r = R_0$ залишається вільною, на нескінченності напруження і переміщення відсутні. Уздовж серединного радіусу ($\theta = 0$) пластинка посилена стрижнем, який у граничній точці навантажений поздовжнім зусиллям P_0 (рис. 3.1).

Матеріал пластини є ортотропним, головні напрямки анізотропії збігаються з полярними координатами r, θ .

Потрібно визначити розподіл напружень в стрижні, зусилля взаємодії між стрижнем і пластиною, а також напруження в пластині.

Відомо, що рівняння рівноваги пластини в полярних координатах мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0.\end{aligned}$$

Радіальне та окружне відносні подовження виражаються формулами:

$$e_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\mathcal{G}_{r\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta; \quad e_\theta = -\frac{\mathcal{G}_{\theta r}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta; \quad e_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta},$$

з яких отримуємо:

$$\sigma_r = \frac{E_r(e_r + \mathcal{G}_{r\theta} e_\theta)}{1 - \mathcal{G}_{\theta r} \mathcal{G}_{r\theta}}; \quad \sigma_\theta = \frac{E_\theta(e_\theta + \mathcal{G}_{\theta r} e_r)}{1 - \mathcal{G}_{r\theta} \mathcal{G}_{\theta r}}; \quad \tau_{r\theta} = G_{r\theta} e_{r\theta},$$

де σ, τ – нормальне та дотичне напруження в пластині; $\mathcal{G}_{r\theta}, \mathcal{G}_{\theta r}$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластинки, E_r, E_θ – модулі Юнга; $G_{r\theta}$ – модуль пластини на зсув.

Оскільки

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r},$$

тоді

$$\begin{aligned}\sigma_r &= B_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mathcal{G}_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right); \quad \sigma_\theta = B_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \mathcal{G}_{\theta r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \\ \tau &= G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right),\end{aligned}$$

де $u_r; u_\theta$ – компоненти вектора переміщень,

$$B_1 = \frac{E_r t}{1 - \mathcal{G}_{r\theta} \mathcal{G}_{\theta r}}; \quad B_2 = \frac{E_\theta t}{1 - \mathcal{G}_{r\theta} \mathcal{G}_{\theta r}} \quad \text{– жорсткості пластини}$$

на розтяг-стискання, t – товщина пластини; $G = G_{r\theta} t$ – жорсткість пластини на зсув.

Для зручності введемо деякі позначення:

$$u_r = u; \quad u_\theta = v; \quad \sigma_r = \sigma_1; \quad \sigma_\theta = \sigma_2; \quad \mathcal{G}_{r\theta} = \mathcal{G}_1; \quad \mathcal{G}_{\theta r} = \mathcal{G}_2,$$

причому $\mathcal{G}_1 B_2 = \mathcal{G}_2 B_1$.

Тоді вихідні рівняння рівноваги пластини набудуть наступного вигляду:

$$B_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\mathcal{G}_{12}}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \mathcal{G}_{12} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{G}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + B_1 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mathcal{G}_{12}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \right] - B_2 \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \mathcal{G}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} \right] = 0, \\
& G \left[\left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} v - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \\
& + \frac{B_2}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{G}_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right] + \frac{2G}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Якщо замість полярних координат r, θ ввести безрозмірні координати ξ, η співвідношеннями $\theta = \eta; r = R_0 e^\xi$, тоді поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини (окремий випадок рівнянь (1.12) п. 1)

$$\begin{cases} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0; \end{cases} \quad (3.1)$$

при наступних крайових умовах:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0 \quad (\xi = 0), \\
\tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0), \\
u &= u_c; v = 0 \quad (\eta = 0), \quad u = v = 0 \quad (\eta = \pm \gamma).
\end{aligned}$$

На нескінченності ($\xi \rightarrow \infty$) всі функції перетворюються на нуль. Переміщення стрижня u_c задовольняє співвідношенню

$$EF u_{c\xi\xi} = P_0 R_0 e^\xi \delta(\xi) - 2R_0 e^\xi \tau(\xi, 0). \quad (3.2)$$

Тут $u = u_r; v = u_\theta$ – компоненти переміщень пластини; B_1, B_2 – жорсткість пластини на розтяг-стискання; G – жорсткість пластини на зсув; σ_1, τ – нормальне та дотичне зусилля у пластині; $m = 1 + \mathcal{G}_2 B_1 / G = 1 + \mathcal{G}_1 B_2 / G$; $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини ($\mathcal{G}_1 B_2 = \mathcal{G}_2 B_1$); EF – жорсткість стрижня на розтяг-стискання; $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака; $\tau(\xi, 0) = T(\xi)$ – контактне зусилля взаємодії між стрижнем та пластиною; ξ, η індекси позначають диференціювання за відповідними координатами.

Оскільки при $\eta = 0; v = 0$ ($v_\xi = 0$), то контактне зусилля взаємодії між стрижнем і пластиною визначається за формулою

$$T(\xi) = \tau(\xi, 0) = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta \Big|_{\eta=0}. \quad (3.3)$$

Надалі, з умов симетрії щодо осі Ox , розглядаємо лише область

$$\xi \geq 0 \quad (r \geq R_0); 0 \leq \eta \leq \gamma.$$

Розв'язання задачі методом збурень.

Розділимо рівняння (3.1) на B_1 . Тоді отримаємо

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} + \varepsilon u_{\eta\eta} - q(v_\eta + u) + \varepsilon m v_{\xi\eta} - \varepsilon v_\eta = 0, \\ \varepsilon v_{\xi\xi} + q v_{\eta\eta} + q u_\eta + \varepsilon m u_{\xi\eta} + \varepsilon(u_\eta - v) = 0; \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{G}{B_1}, \quad q = \frac{B_2}{B_1}.$$

Введемо афінні перетворення координат першого типу:

$$\xi_1 = \alpha\xi; \quad \eta_1 = \varepsilon^{-1/2}\eta; \quad u = U^{(1)}; \quad v = \varepsilon^{1/2}V^{(1)}$$

та другого типу:

$$\xi_2 = \beta\varepsilon^{-1}\xi; \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1/2}\eta; \quad u = \varepsilon^{3/2}U^{(2)}; \quad v = \varepsilon^{1/2}V^{(2)}.$$

Після підстановки перетворень першого типу система (3.4) набуде вигляду (окремий випадок рівнянь (1.18) п.1.):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi_1^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \eta_1^2} - q \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta_1} + U^{(1)} \right) + \varepsilon m \alpha \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \eta_1 \partial \xi_1} - \varepsilon \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta_1} = 0, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \xi_1^2} \alpha^2 + q \left(\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \eta_1} \right) + \varepsilon \left(m \alpha \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \eta_1 \partial \xi_1} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \eta_1} \right) - \varepsilon^2 V^{(1)} = 0; \end{cases} \quad (3.5)$$

Вирази для напружень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= B_1 (R_0 e^{\xi_1/\alpha})^{-1} \left(\alpha \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi_1} + \mathfrak{g}_2 \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta_1} + U^{(1)} \right) \right), \\ \sigma_2^{(1)} &= B_2 (R_0 e^{\xi_1/\alpha})^{-1} \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta_1} + U^{(1)} + \mathfrak{g}_1 \alpha \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi_1} \right), \\ \tau^{(1)} &= G (R_0 e^{\xi_1/\alpha})^{-1} \left(\varepsilon^{-1/2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \eta_1} + \varepsilon^{1/2} \alpha \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi_1} - \varepsilon^{1/2} V^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Після застосування афінних перетворень другого типу до системи (3.4) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi_2^2} \beta^2 + \varepsilon^{1/2} \left(m \beta \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \xi_2 \partial \eta_2} - q \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \eta_2} \right) - \varepsilon^{3/2} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \eta_2} + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \eta_2^2} - q U_{(2)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \xi_2^2} \beta^2 + q \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \eta_2^2} + \varepsilon^{3/2} \left(q \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta_2} + \beta m \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi_2 \partial \eta_2} \right) - \varepsilon^2 V^{(2)} + \\ + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вирази для напружень після застосування перетворень другого типу запишуться у вигляді (п.1.2, формули (1.24)):

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(2)} &= B_1 \left(R_0 e^{\xi_2 / \beta \varepsilon^{-1}} \right)^{-1} \left(\varepsilon^{1/2} \beta \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi_2} + \mathcal{G}_2 \left(\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \eta_2} + \varepsilon^{3/2} U^{(2)} \right) \right), \\ \sigma_2^{(2)} &= B_2 \left(R_0 e^{\xi_2 / \beta \varepsilon^{-1}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta_2} + \varepsilon^{3/2} U^{(2)} + \mathcal{A} \varepsilon^{1/2} \beta \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi_2} \right), \\ \tau^{(2)} &= G \left(R_0 e^{\xi_2 / \beta \varepsilon^{-1}} \right)^{-1} \left(\varepsilon^{1/2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta_2} + \varepsilon^{-1/2} \beta \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \xi_2} - \varepsilon^{1/2} V^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Компоненти вектора переміщень, а також нормальне та дотичне напруження представлимо у вигляді суперпозиції розв'язків обох типів.

$$\begin{aligned} u = u^{(1)} + u^{(2)} = U^{(1)} + \varepsilon^{3/2} U^{(2)}; \quad v = v^{(1)} + v^{(2)} = \varepsilon^{1/2} (V^{(1)} + V^{(2)}), \\ \sigma_1 = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}; \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}; \quad \tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}. \end{aligned}$$

Після представлення функцій $U^{(k)}, V^{(k)}, (k=1,2)$ у вигляді рядів за дробовими ступенями параметра ε , обираємо асимптотичну послідовність за параметром $\varepsilon^{1/2}$.

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{1,0} + \varepsilon^{1/2} U^{1,1} + \varepsilon U^{1,2} + \dots, \\ U^{(2)} &= U^{2,0} + \varepsilon^{1/2} U^{2,1} + \varepsilon U^{2,2} + \dots, \\ V^{(1)} &= V^{1,0} + \varepsilon^{1/2} V^{1,1} + \varepsilon V^{1,2} + \dots, \\ V^{(2)} &= V^{2,0} + \varepsilon^{1/2} V^{2,1} + \varepsilon V^{2,2} + \dots, \end{aligned}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{1/2} \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \dots; \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon^{1/2} \beta_1 + \varepsilon \beta_2 + \dots.$$

Нехай $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

Після підстановки отриманих рядів у системи (3.5) та (3.6) та відповідних спрощень, сформульована вище крайова задача у першому наближенні зводиться до послідовного розв'язання двох наступних (у вихідних змінних):

НДС першого типу (окремий випадок рівнянь (1.22) п.1.2)

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (3.7)$$

$$v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi}^{1,0} &= 0 \quad (\xi = 0), \\
u^{1,0} &= u_c \quad (\eta = 0), \\
u^{1,0} &= 0 \quad (\eta = \gamma);
\end{aligned} \tag{3.9}$$

НДС другого типу (частинний випадок рівнянь (1.23) п. 1)

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0; \quad u_{\xi\xi}^{2,0} = 0, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
v_{\xi}^{2,0} &= -u_{\eta}^{1,0} \quad (\xi = 0), \\
v^{2,0} &= -v^{1,0} \quad (\eta = 0, \eta = \gamma).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

при $\xi \rightarrow \infty$ всі функції прямують до нуля.

Для стрижня:

$$\frac{d^2 u_c}{d\xi^2} = -\frac{2G}{EF} \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \tag{3.12}$$

$$\text{при } \xi = 0 \quad \frac{d u_c}{d\xi} = \frac{P_0 R_0}{EF}; \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad \frac{d u_c}{d\xi} = 0. \tag{3.13}$$

НДС першого типу. Крайова задача першого типу зводиться до інтегрування рівняння (3.2) з урахуванням (3.3) та нульовими граничними умовами, а також рівняння (3.7) із граничними умовами (3.9).

Застосуємо косинус-перетворення Фур'є за координатою ξ до рівняння (3.7)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{B_1}{G} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u^{1,0}}{\partial \xi^2} \cos s\xi d\xi = -\frac{B_1}{G} s^2 u_*^{1,0}(s, \eta),$$

$$\text{де } u_*^{1,0}(s, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u^{1,0}(\xi, \eta) \cos s\xi d\xi.$$

Тоді рівняння (3.7) запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 u_*^{1,0}}{d\eta^2} - \omega^2 s^2 u_*^{1,0}(s, \eta) = 0, \tag{3.14}$$

де $\omega^2 = B_1/G$.

Після застосування косинус-перетворення Фур'є за координатою ξ до рівняння (3.8) отримаємо:

$$\frac{d^2 v_*^{1,0}}{d\eta^2} + u_*^{1,0}(s, \eta) = 0, \tag{3.15}$$

$$\text{де } v_*^{1,0}(s, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v^{1,0}(\xi, \eta) \cos s\xi d\xi.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.14) може бути записаний у вигляді:

$$u_*^{1,0}(s, \eta) = C_1(s)ch(\omega s \eta) + C_2(s)sh(\omega s \eta).$$

Оскільки при $\eta = \gamma$ $u^{1,0} = 0$, тоді

$$C_1ch(\omega s \gamma) + C_2sh(\omega s \gamma) = 0, \text{ тобто } C_2(s) = -C_1(s)cth(\omega s \gamma).$$

Тому

$$\begin{aligned} u_*^{1,0}(s, \eta) &= C_1(s)[ch(\omega s \eta) - cth(\omega s \gamma)sh(\omega s \eta)] = \\ &= C_1(s) \frac{sh(\omega s \gamma)ch(\omega s \eta) - ch(\omega s \gamma)sh(\omega s \eta)}{sh(\omega s \gamma)}, \end{aligned}$$

тобто

$$u_*^{1,0}(s, \eta) = C_1(s) \frac{sh(\omega s(\gamma - \eta))}{sh(\omega s \gamma)}. \quad (3.16)$$

Застосуємо до рівняння (3.12) косинус-перетворення Фур'є за координатою ξ .

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u_c}{\partial \xi^2} \cos s \xi d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0 R_0}{EF} - s^2 u_c^*(s),$$

$$\text{де } u_c^*(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_c(\xi) \cos s \xi d\xi.$$

Тоді рівняння (3.12) набуває вигляду:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0 R_0}{EF} + s^2 u_c^*(s) = \frac{2G}{EF} \left. \frac{du_*^{1,0}}{d\eta} \right|_{\eta=0}.$$

Оскільки

$$\left. \frac{du_*^{1,0}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = -C_1(s) \omega s cth(\omega s \gamma),$$

тоді

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0 R_0}{EF} + s^2 u_c^*(s) = -C_1(s) \frac{2G\omega}{EF} s cth(\omega s \gamma).$$

Звідси (оскільки $u_c^*(s) = u_*^{1,0}(s, 0)$):

$$C_1(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{1}{s^2 + 2gs cth(\omega s \gamma)}, \text{ де } g = \frac{G\omega}{EF}.$$

Підставляючи знайдене значення $C_1(s)$ в (3.16), отримаємо

$$u_*^{1,0}(s, \eta) = -\sqrt{\frac{2 P_0 R_0}{\pi EF}} \frac{sh[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{1}{s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}.$$

Тоді

$$u^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{sh[\omega(\gamma - \eta)s] \cos \xi s}{sh(\omega\gamma s) s \varphi(s)} ds, \quad (3.17)$$

$$\text{де } \omega = (B_1 / G)^{1/2}; \varphi(s) = s + g \operatorname{cth}(\omega\gamma s).$$

$$0 \leq \xi < \infty; 0 \leq \eta \leq \gamma.$$

З (3.17) маємо:

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{sh[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{\sin(\xi s) ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} = \frac{2 P_0 \omega R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{ch[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{\cos(\xi s) ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}. \quad (3.19)$$

Зокрема, при $\eta = \gamma$

$$\left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} \right|_{\eta=\gamma} = 0; \quad \left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\gamma} = \frac{2 P_0 \omega R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{\cos(\xi s) ds}{[s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)] sh(\omega\gamma s)}. \quad (3.20)$$

При $\eta = 0$ формули (3.17) – (3.19) дають

$$u^{1,0}(\xi, 0) = -\frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{\cos \xi s}{s \varphi(s)} ds, \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi s) ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}, \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{2 P_0 \omega R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\omega\gamma s) \cos(\xi s) ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}. \quad (3.23)$$

З рівняння (3.8) простим інтегруванням отримаємо

$$v^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{2 P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^\infty \frac{ch[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{\cos \xi s}{s^2 \varphi(s)} ds. \quad (3.24)$$

Звідси

$$\frac{\partial v^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^\infty \frac{ch[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{\sin \xi s ds}{s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}, \quad (3.25)$$

$$v^{1,0}(\xi, 0) = -\frac{2 P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^\infty \frac{\operatorname{cth}[\omega\gamma s]}{s} \frac{\cos \xi s ds}{s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}, \quad (3.26)$$

$$v^{1,0}(\xi, \gamma) = -\frac{2P_0 R_0}{\pi E F \omega} \int_0^\infty \frac{\cos \xi s ds}{s \operatorname{sh}(\omega \gamma s) [s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega \gamma s)]}, \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{\partial v^{1,0}}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = \frac{2P_0 R_0}{\pi E F \omega} \int_0^\infty \frac{\operatorname{cth}(\omega \gamma s) \sin \xi s ds}{s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega \gamma s)}, \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial v^{1,0}}{\partial \xi} \right|_{\eta=\gamma} = \frac{2P_0 R_0}{\pi E F \omega} \int_0^\infty \frac{\sin \xi s ds}{s \operatorname{sh}(\omega \gamma s) [s^2 + 2gs \operatorname{cth}(\omega \gamma s)]}. \quad (3.29)$$

Розв'язок (3.17) дозволяє задовольнити крайові умови за нормальними напруженнями σ_1 при $\xi=0$, переміщенні u при $\eta=\gamma$, а також рівності переміщень пластини і стрижня ($u_c = u$) при $\eta=0$. Крайові умови щодо дотичних напружень τ при $\xi=0$ і переміщення v при $\eta=0$ і $\eta=\gamma$ задовольняються при розв'язанні крайової задачі (3.10), (3.11), що визначає напружено-деформований стан пластини другого типу.

НДС другого типу. Застосуємо до першого рівняння (3.10) косинус-перетворення Фур'є по координаті ξ .

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{G}{B_2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 v^{2,0}}{\partial \xi^2} \cos \vartheta \xi d\xi = \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} - \chi^2 \vartheta^2 v_*^{2,0}(\vartheta, \eta),$$

$$\text{де } \chi^2 = G/B_2; \quad v_*^{2,0}(\vartheta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v^{2,0}(\xi, \eta) \cos \vartheta \xi d\xi.$$

Тоді перше рівняння системи (3.10) запишеться таким чином:

$$\frac{d^2 v_*^{2,0}}{d\eta^2} - \chi^2 \vartheta^2 v_*^{2,0}(\vartheta, \eta) = -\chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left. \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \right|_{\xi=0}, \quad (3.30)$$

де $\partial u^{1,0} / \partial \eta$ визначається формулою (3.19).

$$v_*^{2,0}(\vartheta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v^{2,0}(\xi, \eta) \cos \vartheta \xi d\xi.$$

Після застосування косинус-перетворення Фур'є за координатою ξ до крайових умов (3.11) при $\eta=0$ і $\eta=\gamma$ отримаємо:

$$v_*^{2,0}(\vartheta, 0) = -v_*^{1,0}(\vartheta, 0); \quad v_*^{2,0}(\vartheta, \gamma) = -v_*^{1,0}(\vartheta, \gamma), \quad (3.31)$$

де $v_*^{1,0}(\vartheta, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v^{1,0}(\xi, \eta) \cos \vartheta \xi d\xi$, а $v^{1,0}(\xi, \eta)$ визначається

рівністю (3.24).

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (3.30) має вигляд: $v_{*u}^{2,0}(\vartheta, \eta) = C_3(\vartheta)e^{-\chi\eta\vartheta} + C_4(\vartheta)e^{\chi\eta\vartheta}$, де C_3, C_4 – величини, незалежні від координати η .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.30) шукатимемо у вигляді

$$v_{*u}^{2,0}(\vartheta, \eta) = \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \int_0^\infty \frac{A \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{\varphi(s)},$$

де A не залежить від координати η .

Двічі продиференціюємо по η та підставимо отримані вирази в рівняння (3.30).

$$\begin{aligned} \frac{dv_{*u}^{2,0}}{d\eta} &= \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \int_0^\infty \frac{A(-\omega s) \operatorname{sh}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{\varphi(s)}, \\ \frac{d^2 v_{*u}^{2,0}}{d\eta^2} &= \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \int_0^\infty \frac{A(\omega^2 s^2) \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{\varphi(s)}. \end{aligned}$$

Після підстановки $\frac{dv_{*u}^{2,0}}{d\eta}$ і $\frac{d^2 v_{*u}^{2,0}}{d\eta^2}$ в (3.30) та скорочення на вираз

$\frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF}$, отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{A(\omega^2 s^2) \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)} - \\ &- \chi^2 \vartheta^2 \int_0^\infty \frac{A \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)} = \\ &= -\chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\int_0^\infty \frac{A \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s] [\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2] + \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{ch}[\omega(\gamma - \eta)s]}{\operatorname{sh}(\omega\gamma s)} \frac{ds}{s + 2g \operatorname{cth}(\omega\gamma s)} = 0.$$

Або:

$$A(\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2) + \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0, \text{ тобто } A = -\frac{\chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.30) записується так:

$$v_*^{2,0}(\vartheta, \eta) = C_3(\vartheta)e^{-\chi\eta^{\vartheta}} + C_4(\vartheta)e^{\chi\eta^{\vartheta}} - \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ch[\omega(\gamma - \eta)s]}{sh(\omega\gamma s)} \frac{ds}{[s + 2gcth(\omega\gamma s)](\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)}. \quad (3.32)$$

З граничних умов (3.31) отримаємо при $\eta = 0$:

$$\begin{aligned} C_3 + C_4 - \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{cth(\omega\gamma s) ds}{[s + 2gcth(\omega\gamma s)](\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{cth[\omega\gamma s] \cos \xi s ds}{s^2 [s + 2gcth(\omega\gamma s)]} \right) \cos \vartheta \xi d\xi; \end{aligned}$$

при $\eta = \gamma$:

$$\begin{aligned} C_3 e^{-\chi\gamma^{\vartheta}} + C_4 e^{\chi\gamma^{\vartheta}} - \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{sh(\omega\gamma s) [s + 2gcth(\omega\gamma s)] (\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi s ds}{s^2 [s + 2gcth(\omega\gamma s)] sh(\omega\gamma s)} \right) \cos \vartheta \xi d\xi. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{cth[\omega\gamma s] \cos \xi s ds}{s^2 [s + 2gcth(\omega\gamma s)]} \right) \cos \vartheta \xi d\xi + \\ + \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{cth(\omega\gamma s) ds}{[s + 2gcth(\omega\gamma s)] (\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{cth(\omega\gamma s)}{[s + 2gcth(\omega\gamma s)]} \left[\frac{\cos \xi s \cos \xi \vartheta}{s^2} + \frac{\omega^2 \chi^2}{\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2} \right] ds \right) d\xi = \\ = A_1(\vartheta); \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi s ds}{s^2 sh(\omega\gamma s) [s + 2gcth(\omega\gamma s)]} \right) \cos \vartheta \xi d\xi + \\ + \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0 \omega}{EF} \chi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{sh(\omega\gamma s) [s + 2gcth(\omega\gamma s)] (\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2P_0 R_0}{\pi EF \omega} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{sh(\omega\gamma s) [s + 2gcth(\omega\gamma s)]} \left[\frac{\cos \xi s \cos \xi \vartheta}{s^2} + \frac{\omega^2 \chi^2}{\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2} \right] ds \right) d\xi = \\ = A_2(\vartheta), \quad (3.34) \end{aligned}$$

тоді з крайових умов (3.31) отримаємо систему:

$$\begin{aligned} C_3 + C_4 = A_1(\vartheta), \\ C_3 e^{-\chi\gamma^{\vartheta}} + C_4 e^{\chi\gamma^{\vartheta}} = A_2(\vartheta), \quad (3.35) \end{aligned}$$

де $A_1(\vartheta), A_2(\vartheta)$ визначаються за формулами (3.33), (3.34).

З системи (3.35) маємо

$$C_3 = \frac{A_1(\vartheta)e^{\chi\gamma\vartheta} - A_2(\vartheta)}{2sh(\omega\gamma\vartheta)}; \quad C_4 = \frac{A_2(\vartheta) - A_1(\vartheta)e^{-\chi\gamma\vartheta}}{2sh(\omega\gamma\vartheta)}. \quad (3.36)$$

Підставляючи коефіцієнти (3.36) у вираз (3.32) і переходячи до оригіналу, отримуємо

$$v^{2,0}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v_*^{2,0}(\vartheta, \eta) \cos \xi \vartheta d\vartheta, \quad (3.37)$$

Тут враховано, що

$$\int_0^\infty \frac{\cos \xi \vartheta d\vartheta}{(\omega^2 s^2 - \chi^2 \vartheta^2)} = \frac{1}{\chi^2} \int_0^\infty \frac{\cos \xi \vartheta d\vartheta}{\left(\frac{\omega s}{\chi}\right)^2 - \vartheta^2} = \frac{1}{\chi^2} \frac{\pi}{2\left(\frac{\omega s}{\chi}\right)} \sin\left(\frac{\omega \xi s}{\chi}\right). \quad (3.38)$$

З другого рівняння (3.10) знаходимо, що $u^{2,0} = 0$.

Аналіз одержаних результатів. На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Усі крайові умови задовольняються. Оскільки $u^{2,0} = 0$ похибка в крайових умовах за нормальним напруженням σ_1 при $\xi = 0$ відсутня і, отже, розв'язки наступного наближення виявляються нульовими. Тому, якщо обмежитися першими двома наближеннями, компоненти НДС визначаються за формулами

$$u = u^{1,0}; \quad v = v^{1,0} + v^{2,0}; \quad \sigma_1(\xi, \eta) = B_1(R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0}, \\ \sigma_2(\xi, \eta) = B_2(R_0 e^\xi)^{-1} v_\eta^{2,0}; \quad \tau(\xi, \eta) = G(R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta^{1,0} + v_\xi^{2,0}), \quad (3.39)$$

Зусилля в стрижні

$$N(\xi) = EF(R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} \quad (\eta = 0),$$

а контактне зусилля взаємодії між стрижнем та пластиною

$$T(\xi) = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} \quad (\eta = 0),$$

де $u^{1,0}, v^{1,0}, v^{2,0}$ задаються співвідношеннями (3.17), (3.24) и (3.37).

Деякі окремі випадки. При малих значеннях параметра s (що відповідає великим значенням координати ξ)

$$sh(\omega\gamma s) \approx \omega\gamma s; \quad ch[\omega(\gamma - \eta)s] \approx 1; \quad cth(\omega\gamma s) \approx 1/(\omega\gamma s).$$

В цьому випадку з формули (3.17) отримаємо

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\gamma - \eta}{\gamma} e^{-g_* \xi}, \quad \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{1}{\gamma g_*} e^{-g_* \xi}, \quad (3.40)$$

де $g_*^2 = 2g/(\gamma\omega) = 2G/(\gamma EF)$.

Останній розв'язок (3.40) показує, що при досить великих значеннях координати пластина працює лише на зсув (B_1 відсутній). Якщо в початковій постановці задачі припустити, що пластина працює тільки на зсув ($B_1=0$), тоді розв'язок (3.40) буде справедливим при довільних значеннях координати ξ . У цьому випадку нормальне напруження σ_1 в пластині дорівнює нулю, складова дотичного напруження, що визначається функцією $u_{\eta}^{1,0}$, є сталою вздовж координати η , а зусилля в стрижні $N(\xi)$ знаходиться за формулою

$$N(\xi) = P_0 e^{-(1+g_*)\xi}.$$

При великих значеннях параметра s (що відповідає малим значенням координати ξ)

$$sh[\omega(\gamma - \eta)s] \approx ch[\omega(\gamma - \eta)s] \approx e^{\omega s} e^{-\omega \eta s}; sh(\omega \eta s) \approx e^{\omega s}; cth(\omega \eta s) \approx 1.$$

В цьому випадку з формули (3.17) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} &= \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega \eta s} \sin \xi s}{s + 2g} ds, \\ \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} &= \frac{2 P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega \eta s} \cos \xi s}{s + 2g} ds. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Розв'язок (3.41) визначає характер напружено-деформованого стану поблизу лінії $\xi = 0$ у початковій постановці задачі. Зокрема, з першої формули (3.41) при $\eta = 0$ маємо

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi s}{s + 2g} ds = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} [\sin(2g\xi)ci(2g\xi) - \cos(2g\xi)si(2g\xi)],$$

де $si(x), ci(x)$ – відповідно інтегральні синус та косинус. При $\xi = 0$ вираз, що стоїть у квадратних дужках дорівнює $\pi/2$ тобто зусилля в стрижні, що визначається з (3.39), при $\xi = 0$ дорівнює P_0 .

Друга формула (3.41) дає можливість оцінити характер особливостей дотичних напружень τ в околі точки $\xi = 0$ на лініях $\eta = 0$ і $\eta = \gamma$, оскільки уздовж цих ліній $\eta = \gamma$. При $\eta = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} &= \frac{2 P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi s}{s + 2g} ds = \frac{2 P_0 R_0 \omega}{\pi EF} [-\sin 2g\xi)si(2g\xi) - \\ &\quad - \cos 2g\xi)ci(2g\xi)]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi s}{s + 2g} ds = -\sin(2g\xi)si(2g\xi) - \cos(2g\xi)ci(2g\xi).$$

Оскільки інтегральний косинус при $x=0$ має логарифмічну особливість, тоді контактне зусилля взаємодії між стрижнем і пластиною $T(\xi) = G(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\eta}^{1,0}$, де $u_{\eta}^{1,0}$ визначається формулою (3.42), також має логарифмічну особливість в околі точки $\xi = 0$.

Значимо, що отримана (3.42) особливість є першим членом розкладання точної за параметром $\varepsilon = G/B_1$ ⁹. Тому розв'язок (3.42) справедливий лише у деякому околі точки $\xi = 0, \eta = 0$. Характер точної особливості відомий, невідомим залишається лише коефіцієнт при цій особливості. Цей коефіцієнт може бути знайдено з умов «зрощування» особливого розв'язку з отриманим наближенням. Умови «зрощування» в найпростішому випадку можуть вимагати в певній точці збігу наближеного та особливого розв'язків, а також відповідних похідних. Ці умови дають можливість визначити точку зрощування двох розв'язків та коефіцієнт особливості, тобто знайти зони, де справедливий розв'язок (3.42), або де необхідно враховувати точне значення особливості. При $\eta = \gamma$ інтеграл в другій формулі (3.41) дає інтегральну показникову функцію $Ei(x)$, що при $x=0$ має логарифмічну особливість. Тому і при $\eta = \gamma$ дотичне напруження в околі точки $\xi = 0$ має логарифмічну особливість.

Слід сказати, що знаходження невідомих функцій при великих і малих значеннях деяких параметрів може забезпечити знаходження цих функцій у довільних точках, якщо вдається «зростити» граничні значення (наприклад, з використанням апроксиманти Паде).

На наступних рисунках представлені результати досліджень залежності зусиль у стрижні $N(\xi)$ та зусиль контактної взаємодії стрижня та пластини $T(\xi)$ від жорсткісних характеристик матеріалу пластини та ступеня анізотропії.

⁹ Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 3. № 2.1, 2020. С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>

На рис. 3.2.-3.3. представлено зміну зусиль у стрижні $N^*(\xi) = \frac{N}{P_0}$, а також зусиль контактної взаємодії стрижня і пластини $T^*(\xi) = \frac{T}{P_0}$ в залежності від значень малого параметра ε : для ізотропної пластини ($\varepsilon = 0.35$), а також для випадків ортотропного матеріалу пластини ($\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01$). На рисунках зображені окремо випадки великих значень параметра s (малі ξ) (3.17) та малих s (великих ξ).

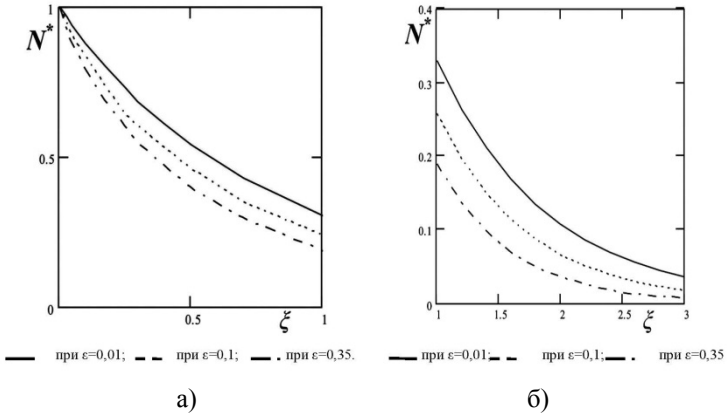


Рис. 3.2. Розподіл зусиль у стрижні залежно від значень ε : (а) для малих ξ ; (б) для великих ξ

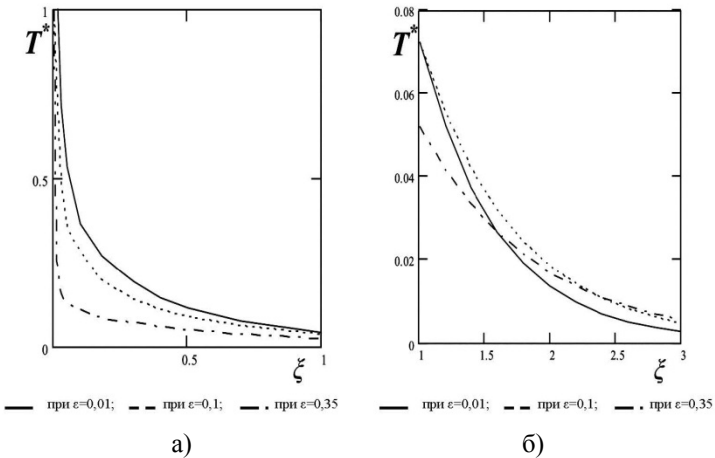


Рис. 3.3. Розподіл зусиль контактної взаємодії стрижня та пластини в залежності від значень ε : (а) для малих ξ ; (б) для великих ξ

Розглянемо варіанти різних значень функції $g = g(\varepsilon)$. Згадаємо, що $g = \frac{G\omega}{EF}$; $\omega = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Залежність зусилля у стрижні та контактної взаємодії між стрижнем та пластиною для різних значень g ($g=0.6$; 0.3 ; 0.1) проілюстрована на рис. 3.4-3.5 для криволінійно анізотропної пластини (при $\varepsilon = 0.2$).

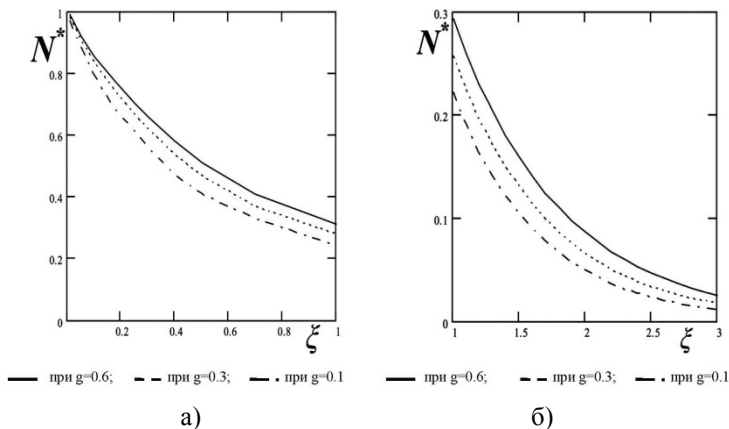


Рис. 3.4. Розподіл зусилля у стрижні залежно від значень g :
 (а) для малих ξ ; (б) для великих ξ

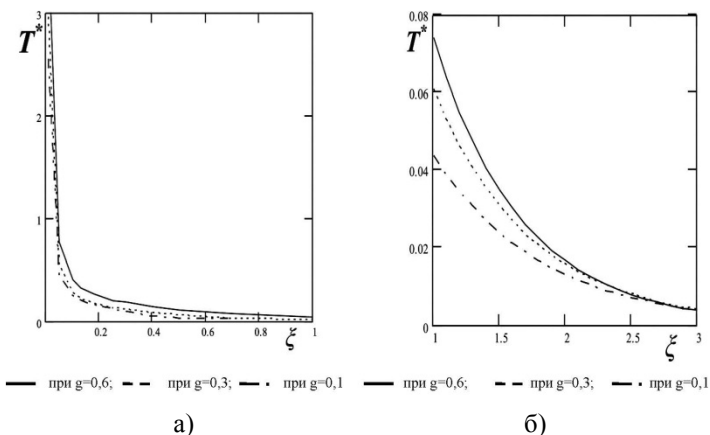


Рис. 3.5. Розподіл зусилля контактної взаємодії стрижня та пластини в залежності від значень g : (а) для малих ξ ; (б) для великих ξ

Вплив величини кута γ розкриття пластини на розподіл зусиль ($N^*(\xi) = \frac{N}{P_0}$) у стрижні представлено в таблиці 2 (при малих значеннях ξ).

Таблиця 2

Залежність зусиль N^* у стрижні від кута розкриття γ пластини

$\gamma \backslash \xi$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
0	1	1	1	1
0.05	0.922	0.928	0.931	0.934
0.1	0.851	0.86	0.866	0.873
0.15	0.785	0.798	0.806	0.816
0.2	0.724	0.74	0.75	0.762
0.25	0.667	0.686	0.698	0.712
0.3	0.615	0.637	0.65	0.666
0.35	0.568	0.591	0.605	0.622
0.4	0.524	0.548	0.563	0.581
0.45	0.483	0.508	0.524	0.543
0.5	0.445	0.471	0.487	0.507
0.55	0.411	0.437	0.454	0.474
0.6	0.379	0.405	0.422	0.443
0.65	0.349	0.376	0.393	0.414
0.7	0.322	0.349	0.366	0.387
0.75	0.297	0.324	0.34	0.361

Виходячи з отриманих чисельних даних, наведених у таблиці 2, можна дійти висновку, що величина кута розкриття пластини має невеликий вплив на розподіл напружень у стрижні.

Контактна задача для стрижня та ортотропної пластини з циліндричною анізотропією скінченних розмірів.

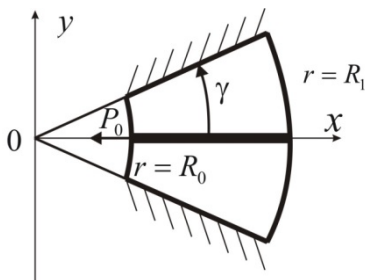


Рис. 3.6

Нехай пружна пластина товщини t ($R_0 \leq r \leq R_1, -\gamma \leq \theta \leq \gamma$) закріплена по кромках $\theta = \pm\gamma$ (рис. 3.6). Межі $r = R_0; r = R_1$ залишаються вільними. У середині між закріпленими кромками (вздовж лінії $\theta = 0$) пластина посилена стрижнем, який у граничній точці $r = R_0$ навантажений поздовжнім

зусиллям P_0 . Матеріал пластини є ортотропним, головні напрямки анізотропії збігаються з полярними координатами r, θ . Потрібно визначити закони змінення зусилля у стрижні, контактного зусилля взаємодії між стрижнем та пластиною, а також напруження у пластині.

Якщо замість полярних координат ввести безрозмірні координати ξ, η співвідношеннями $r = R_0 e^\xi; \theta = \eta; 0 \leq \xi \leq h, h = \ln \frac{R_1}{R_0}$,

тоді поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини в переміщеннях (3.1) при наступних крайових умовах:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2(v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \xi = h), \\ u &= u_c, v = 0 \quad (\eta = 0); u = v = 0 \quad (\eta = \pm \gamma);\end{aligned}$$

Переміщення стрижня u_c задовольняє співвідношенню (3.2)

Оскільки при $\eta = 0$ $v = 0$ ($v_\xi = 0$), то контактне зусилля взаємодії між стрижнем та пластиною визначається за формулою

$$T(\xi) = \tau(\xi, 0) = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta|_{\eta=0}. \quad (3.43)$$

З умов симетрії щодо осі Ox , розглядаємо лише область

$$0 \leq \xi \leq h, (R_0 \leq r \leq R_1); 0 \leq \eta \leq \gamma.$$

Розв'язання задачі методом збурень проводиться аналогічно попередній задачі. Скінченні розміри платівки викликають різницю в крайових умовах та подальшому розв'язанні задачі.

Застосовуємо афінні перетворення координат двох типів до вихідної системи і підставляємо рівняння рівноваги пластини асимптотичні розкладання всіх функцій і коефіцієнтів за параметром $\varepsilon^{1/2}$.

Відповідно до розщеплення напружено-деформованого стану пластини на дві складові, сформульована вище крайова задача першому наближенні зводиться до послідовного розв'язування двох наступних:

НДС першого типу

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (3.44)$$

$$v_\eta^{1,0} + u^{1,0} = 0, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}u_\xi^{1,0} &= 0 \quad (\xi = 0, \xi = h), \quad u^{1,0} = u_c \quad (\eta = 0), \\ u^{1,0} &= 0 \quad (\eta = \gamma); \end{aligned} \quad (3.46)$$

НДС другого типу

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0; \quad u_{\xi\xi}^{2,0} = 0, \quad (3.47)$$

$$v_{\xi}^{2,0} = -u_{\eta}^{1,0} \quad (\xi = 0, \xi = h),$$

$$v^{2,0} = -v^{1,0} \quad (\eta = 0, \eta = \gamma). \quad (3.48)$$

При дослідженні **напружено-деформованого стану першого типу** доводиться інтегрувати рівняння (3.2) з урахуванням (3.43) та нульовими граничними умовами, а також рівняння у (3.44) із граничними умовами (3.46).

Застосовується косинус-перетворення Фур'є зі скінченними межами за координатою ξ до рівняння (3.44)

$$\int_0^h \frac{\partial^2 u^{1,0}}{\partial \xi^2} \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi = - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 u_*^{1,0}(n, \eta), \quad \text{де } u_*^{1,0}(n, \eta) = \int_0^h u^{1,0}(n, \eta) \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi.$$

Тоді рівняння (3.44) матиме вигляд:

$$\frac{d^2 u_*^{1,0}}{d\eta^2} - \omega^2 \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 u_*^{1,0}(n, \eta) = 0, \quad (3.49)$$

де $\omega^2 = B_1/G$.

Загальний розв'язок рівняння (3.49) може бути записаний у вигляді:

$$u_*^{1,0}(n, \eta) = C_1(n)ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) + C_2(n)sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right).$$

Оскільки при $\eta = \gamma$ $u^{1,0} = 0$, то

$$C_1ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) + C_2sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) = 0, \quad \text{тобто } C_2(n) = -C_1(n)cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right).$$

$$\text{Тому } u_*^{1,0}(n, \eta) = C_1(n) \left[ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) - cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) \right] =$$

$$= C_1(n) \frac{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right) - ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \eta\right)},$$

$$\text{отже } u_*^{1,0}(n, \eta) = C_1(n) \frac{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}. \quad (3.50)$$

Застосуємо до рівняння (3.2) косинус-перетворення Фур'є із скінченними межами за координатою ξ .

$$\int_0^h \frac{\partial^2 u_c}{\partial \xi^2} \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 u_c^*(n), \text{ де } u_c^*(n) = \int_0^h u_c(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi,$$

$$\int_0^h P_0 R_0 e^{\xi} \delta(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi = P_0 R_0; \quad \int_0^h \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \cos \frac{n\pi\xi}{h} d\xi = \frac{\partial u_*^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}.$$

Тоді рівняння (3.2) набуває вигляду:

$$EF \left(-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 u_c^*(n) \right) = P_0 R_0 - 2G \frac{\partial u_*^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}.$$

Оскільки

$$\frac{du_*^{1,0}}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = -C_1(n) \frac{\omega \frac{n\pi}{h} ch \left[(\gamma - \eta) \omega \frac{n\pi}{h} \right]}{sh \left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma \right)} \Big|_{\eta=0},$$

а $u_c = u^{1,0}(\xi, 0)$ і $u_c^*(n) = u_*^{1,0}(n, 0)$, тоді рівняння (3.2) після застосування до нього косинус-перетворення Фур'є з скінченними межами за координатою ξ запишеться таким чином:

$$-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 C_1(n) = \frac{P_0 R_0}{EF} + \frac{2G}{EF} C_1(n) \omega \frac{n\pi}{h} cth \left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma \right).$$

Звідси

$$C_1(n) = -\frac{P_0 R_0 h^2}{EF \pi^2} \frac{1}{n^2 + g \frac{h}{\pi} n cth \left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma \right)}, \text{ де } g = \frac{2G\omega}{EF}.$$

Підставляючи знайдене значення $C_1(n)$ в (3.50), отримаємо

$$u_*^{1,0}(n, \eta) = -\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{f(n, h)}{\varphi(n)}, \quad u_*^{1,0}(n, \eta) = \int_0^h u^{1,0}(\xi, \eta) \cos(\alpha_n \xi) d\xi, \quad (3.51)$$

$$f(n, \eta) = \frac{sh[\omega \alpha_n (\gamma - \eta)]}{sh(\omega \alpha_n \gamma)}; \quad \varphi(n) = \alpha_n^2 + g \alpha_n cth(\omega \alpha_n \gamma); \quad \omega^2 = B_1/G,$$

$$\alpha_n = n\pi/h, \quad g = 2G\omega/(EF). \quad (3.52)$$

Повертаючись до оригіналу в рівності (3.52), маємо

$$u^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega(\gamma - \eta)}{gh} - \frac{2P_0 R_0}{EFh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n, \eta) \cos(\alpha_n \xi)}{\varphi(n)}. \quad (3.53)$$

З рівняння (3.45) маємо

$$v^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} \frac{(\gamma - \eta)^2}{2} - \frac{2P_0 R_0}{\omega EF h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n, \eta) \cos(\alpha_n \xi)}{\alpha_n \varphi(n)}, \quad (3.54)$$

де $f_1(n, \eta) = ch[\omega \alpha_n (\gamma - \eta)] / sh(\omega \alpha_n \gamma)$.

Тоді

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2P_0 R_0}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{h} \xi\right)}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} + \frac{2P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{h} \xi\right)}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial v^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2P_0 R_0 h}{\pi EF \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{h} \xi\right)}{n^2 + g \frac{h}{\pi} n cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}, \quad (3.57)$$

$$v^{1,0}(\xi, 0) = -\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega \gamma^2}{2gh} - \frac{2P_0 R_0}{EF} \frac{h^2}{\omega \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h} \xi\right)}{n \left[n^2 + g \frac{h}{\pi} n cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \right]}, \quad (3.58)$$

$$v^{1,0}(\xi, \gamma) = -\frac{2P_0 R_0}{EF} \frac{h^2}{\omega \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{h} \xi\right)}{n sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \left[n^2 + g \frac{h}{\pi} n cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \right]}. \quad (3.59)$$

Отримані розв'язки не задовольняють нульовим крайовим умовам щодо дотичних напружень τ для пластини при $\xi = 0$ і $\xi = h$, а також нульовим крайовим умовам за компонентою вектора переміщень v при $\eta = 0$ и $\eta = \gamma$. Усунення відповідних похибок забезпечується розв'язком крайової задачі НДС другого типу (3.47), (3.48).

Знаходження складових НДС другого типу. Застосуємо до першого рівняння (3.47) косинус-перетворення Фур'є із скінченними межами за координатою ξ .

$$\int_0^h \frac{\partial^2 v^{2,0}}{\partial \xi^2} \cos \frac{m\pi\xi}{h} d\xi = \left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) - \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 v_*^{2,0}(m, \eta), \quad (3.60)$$

$$\text{де } v_*^{2,0}(m, \eta) = \int_0^h v^{2,0}(\xi, \eta) \cos \frac{m\pi\xi}{h} d\xi.$$

У рівності (3.60) розглянемо доданок

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} + \\ & + \frac{2P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} - \\ & - \left(\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} + \frac{2P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{\cos(n\pi)}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \right) \cos m\pi = \\ & = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} (1 - \cos m\pi) + \frac{2P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1 - \cos(n\pi) \cos m\pi}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}. \end{aligned}$$

При $m=0$ і при умові, щоб цей доданок не дорівнював нулю, слід прийняти, що n – непарні, тобто $n=1, 3, \dots$ У цьому випадку

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi EF} + \\ & + \frac{2P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}. \quad (3.61) \end{aligned}$$

Якщо n – парні, тоді

$$\left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = 0. \quad (3.62)$$

Якщо приймати, що n – непарні, а m – парні, тоді

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = \\ & = \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi E F} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h}(\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

При n – непарних, m – парних будемо мати:

$$\left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = \frac{2P_0 R_0 \omega}{E F g h}. \quad (3.64)$$

Якщо n – парні, m – парні, тоді

$$\left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = 0. \quad (3.65)$$

При n – парних, m – непарних отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} \Big|_{\xi=h} \cos m\pi \right) = \frac{2P_0 R_0 \omega}{E F g h} + \\ & + \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi E F} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h}(\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Таким чином, після застосування до рівняння (3.47) косинус-перетворення Фур'є із скінченними межами за координатою ξ , воно набуває вигляду:

$$\frac{d^2 v_*^{2,0}}{d\eta^2} - \lambda^2 \alpha_m^2 v_*^{2,0}(m, \eta) = -\lambda^2 \psi(m, \eta), \quad (3.67)$$

$$\text{де } v_*^{2,0}(m, \eta) = \int_0^h v^{2,0}(\xi, \eta) \cos(\alpha_m \xi) d\xi, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{h}, \quad \lambda^2 = G / B_2,$$

а $\psi(m, \eta)$ визначаються формулами (3.61)–(3.65).

Після застосування косинус-перетворення Фур'є із скінченними межами за координатою ξ до граничних умов (3.48) при $\eta = 0$, $\eta = \gamma$ отримаємо

$$v_*^{2,0}(m, 0) = -v_*^{1,0}(m, 0), \quad v_*^{2,0}(m, \gamma) = -v_*^{1,0}(m, \gamma), \quad (3.68)$$

причому $v_*^{1,0}(m, \eta) = \int_0^h v^{1,0}(\xi, \eta) \cos(\alpha_m \xi) d\xi$, а $v^{1,0}(\xi, \eta)$ визначається за формулою (3.54).

Загальний розв'язок рівняння (3.67) може бути представлений наступним чином:

$$v_*^{2,0} \text{ одноп.}(m, \eta) = C_3 e^{-\lambda \alpha_m \eta} + C_4 e^{\lambda \alpha_m \eta}, \quad (3.69)$$

де величини C_3 і C_4 не залежать від координати η та знаходяться з граничних умов (3.68).

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.67) залежить від вибору функції $\psi(m, \eta)$. Зокрема, якщо $\psi(m, \eta) = 0$ (випадки (3.62), (3.65)), тоді загальний розв'язок рівняння (3.67) виражається

формулою (3.69), а величини C_3, C_4 визначаються за умов (3.68).

Якщо $\psi(m, \eta) = \frac{2P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh}$ (формула (3.64)), тоді

$$v_*^{2,0} \text{ частн.} = \frac{2P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} \left(\frac{h}{m\pi} \right)^2, \\ v_*^{2,0} \text{ загал.} = C_3 e^{-\lambda \alpha_m \eta} + C_4 e^{\lambda \alpha_m \eta} + \frac{2P_0 R_0}{EF} \frac{\omega}{gh} \left(\frac{h}{m\pi} \right)^2 \quad (3.70)$$

При

$$\psi(m, \eta) = \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}$$

(формули (3.61), (3.63))

Частинний розв'язок рівняння (3.67) будемо шукати у вигляді:

$$v_*^{2,0} \text{ частн.} = \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{A}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}$$

(A не залежить від η).

Підставляючи цей розв'язок в (3.67), отримаємо:

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{A \left(\omega \frac{n\pi}{h}\right)^2}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} -$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{A}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} = \\
& = -\lambda^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)}.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{A}{n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \left(A \left[\left(\omega \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right] + \lambda^2 \right) = 0.$$

Цей вираз може дорівнювати нулю лише при

$$A = - \frac{\lambda^2}{\left(\omega^2 \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right)}.$$

Тому, якщо $\psi(m, \eta)$ виражається формулами (3.61), (3.62), тоді загальний розв'язок рівняння (3.67) запишеться таким чином:

$$v_{* \text{ загаль.}}^{2,0} = C_3 e^{-\lambda \alpha_m \eta} + C_4 e^{\lambda \alpha_m \eta} -$$

$$- \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi E F} \lambda^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{\left[n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \right] \left[\omega^2 \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right]}.$$

Величини C_3, C_4 визначаються за умов (3.68).

Якщо $\psi(m, \eta)$ визначається з (3.66), тоді загальний розв'язок рівняння (3.67) має вигляд:

$$\begin{aligned}
& v_{* \text{ загаль.}}^{2,0} = C_3 e^{-\lambda \alpha_m \eta} + C_4 e^{\lambda \alpha_m \eta} + \frac{2P_0 R_0}{E F} \frac{\omega}{g h} \left(\frac{h}{m\pi} \right)^2 - \\
& - \frac{4P_0 R_0 \omega}{\pi E F} \lambda^2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{ch\left(\omega \frac{n\pi}{h} (\gamma - \eta)\right)}{sh\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right)} \frac{1}{\left[n + g \frac{h}{\pi} cth\left(\omega \frac{n\pi}{h} \gamma\right) \right] \left[\omega^2 \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right]}, \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Величини C_3, C_4 визначаються з умов (3.68).

Після знаходження коефіцієнтів C_3, C_4 та переходу до оригіналу, отримуємо

$$v^{2,0}(\xi, \eta) = \frac{1}{h} v_*^{2,0}(0, \eta) + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} v_*^{2,0}(m, \eta) \cos \frac{m\pi\xi}{h}, \quad (3.73)$$

де $v_*^{2,0}(m, \eta)$ знаходяться (залежно від умов (3.61), (3.65)) за формулами (3.69), (3.72).

З другого рівняння системи (3.47) знаходимо, що $u^{2,0} = 0$.

Аналіз одержаних результатів. На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Усі крайові умови задовольняються. Оскільки $u^{2,0} = 0$ похибка в крайових умовах за нормальними напруженнями σ_1 при $\xi = 0$, $\xi = h$, відсутня і розв'язки наступного наближення виявляються нульовими. Тому, якщо обмежитись першими двома наближеннями, компоненти НДС визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} u &= u^{1,0}; \quad v = v^{1,0} + v^{2,0}; \quad \sigma_1(\xi, \eta) = B_1(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0}, \\ \sigma_2(\xi, \eta) &= B_2(R_0 e^{\xi})^{-1} v_{\eta}^{2,0}; \quad \tau(\xi, \eta) = G(R_0 e^{\xi})^{-1} (u_{\eta}^{1,0} + v_{\xi}^{2,0}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

Зусилля в стрижні

$$N(\xi) = EF(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} \quad (\eta = 0),$$

а зусилля контактної взаємодії між стрижнем та пластиною

$$T(\xi) = G(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\eta}^{1,0} \quad (\eta = 0),$$

де $u^{1,0}, v^{1,0}, v^{2,0}$ задаються співвідношеннями (3.53), (3.54) и (3.71).

Деякі окремі випадки. Насамперед, слід зазначити, що розв'язок (3.69) – (3.72) напруженого стану другого типу для кругового сектора справедливий за умов (3.61) – (3.66). Далі слід вимагати, щоб розв'язки поставленої задачі скінченного кругового сектора загалом переходили у відповідні розв'язки для напівнескінченного кругового сектору¹⁰

¹⁰ Kazberuk A., Savruk M.P., Chornenkyi A.B. A unified approach to determination of stress concentration near sharp and rounded notches in quasi-orthotropic plane. *Сучасні проблеми механіки та математики* : збірник наукових праць. Львів : ІППММ НАНУ. 2018. С. 107–108.

Функція $u^{1,0}(\xi, \eta)$ (3.53) може бути записана у вигляді:

$$u^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\omega(\gamma - \eta)}{gh} - \frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n, \eta) \cos(s_n \xi)}{\varphi(s_n)} \Delta s_n,$$

де $s_n = n\pi/h$; $\Delta s_n = \pi/h$; $f_1(s_n, \eta) = sh[\omega s_n(\gamma - \eta)] / sh(\omega s_n \gamma)$.

При $h \rightarrow \infty$ ($R_1 \rightarrow \infty$) перший член у правій частині останньої рівності прагне до нуля. При будь-якому фіксованому h другим доданком є функція від змінної s_n , що приймає значення від π/h до ∞ . Тому, при $h \rightarrow \infty$ отримуємо

$$u^{1,0}(\xi, \eta) = -\frac{2}{\pi} \frac{P_0 R_0}{EF} \int_0^{\infty} \frac{f(\eta, s) \cos(\xi s)}{\varphi(s)} ds, \quad (3.75)$$

де $f_1(\eta, s) = sh[\omega(\gamma - \eta)s] / sh(\omega \gamma s)$; $\varphi(s) = s^2 + gs \operatorname{cth}(\omega \gamma s)$.

Вираз (3.75) відповідає розв'язанню задачі для напівнескінченного кругового сектора¹¹.

Аналогічно можна показати граничний перехід функції $v^{2,0}$ (3.73).

Якщо пластина працює тільки на зсув ($\omega \rightarrow 0$), то з рівностей (3.55), (3.56) похідні $\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi}$; $\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta}$ можуть бути записані наступним чином:

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{\gamma - \eta}{\gamma} \frac{sh[g_*(h - \xi)]}{sh(g_* h)}, \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} = \frac{P_0 R_0}{EF} \frac{1}{\gamma g_*} \frac{ch[g_*(h - \xi)]}{sh(g_* h)}, \quad (3.77)$$

де $g_*^2 = 2G/(\gamma EF)$. У цьому випадку зусилля у стрижні визначається формулою

$$N(\xi) = EF(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} \Big|_{\eta=0} = P_0 e^{-\xi} \frac{sh[g_*(h - \xi)]}{sh(g_* h)} \quad (3.78)$$

і задовольняє крайовим умовам при $\xi = 0$ і $\xi = h$, а контактне зусилля взаємодії між стрижнем і пластиною записується за формулою

¹¹ Горик О.В. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик. Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». Луцьк, 2018. Вип. № 63. С. 89-97.

$$T(\xi) = G(R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} \Big|_{\eta=0} = \frac{P_0 G}{\gamma g_* EF} e^{-\xi} \frac{ch[g_*(h-\xi)]}{sh(g_* h)}, \quad (3.79)$$

та не має особливості в точці $\xi = 0$.

При $h \rightarrow \infty$ розв'язки (3.78), (3.79) відповідають аналогічній задачі для напівнескінченного кругового сектора та мають вигляд:

$$N(\xi) = P_0 e^{-(1+g_*)\xi}; \quad T(\xi) = P_0 G / (\gamma g_* EF) e^{-(1+g_*)\xi}.$$

Визначення характеру напруженого стану в околі лінії $\xi = 0$ у вихідній постановці задачі зводиться до аналізу розв'язку (3.75) за більших значень параметра s . В цьому випадку

$$sh[\omega(\gamma - \eta)s] \approx e^{\omega\gamma s} e^{-\omega\eta s}; \quad sh(\omega\gamma s) \approx e^{\omega\gamma s}; \quad cth(\omega\gamma s) \approx 1, \\ ch[\omega(\gamma - \eta)s] \approx e^{\omega\gamma s} e^{-\omega\eta s},$$

а похідні $\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi}$; $\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta}$ з рівності (3.75) набувають вигляду

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \xi} = \frac{2 P_0 R_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega\eta s} \sin \xi s}{s + g} ds, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial u^{1,0}}{\partial \eta} = \frac{2 P_0 R_0 \omega}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega\eta s} \cos \xi s}{s + g} ds. \quad (3.81)$$

Зокрема, при $\eta = 0$ після обчислення інтегралів в (3.80), (3.81) отримаємо:

$$N(\xi) = 2P_0 (\pi e^\xi)^{-1} [\sin(g\xi)ci(g\xi) - \cos(g\xi)si(g\xi)], \quad (3.82)$$

$$T(\xi) = 2P_0 G \omega (\pi EF e^\xi)^{-1} [-\sin(g\xi)si(g\xi) - \cos(g\xi)ci(g\xi)], \quad (3.83)$$

де $si(x)$ і $ci(x)$ – відповідно інтегральні синус і косинус, причому вираз у квадратних дужках рівності (3.82) при $\xi = 0$ дорівнює $\pi/2$, а контактне зусилля $T(\xi)$ при $\xi = 0$ має логарифмічну особливість, оскільки інтегральний косинус $ci(x)$ при $x = 0$ має цю особливість.

Отримана у розв'язку (3.83) особливість є першим членом точного розкладання за параметром $\varepsilon = G/B_1$. Тому співвідношення (3.83) справедливе лише у деякому околі точки $\xi = 0, \eta = 0$.

При $\eta = \gamma$ інтеграл у співвідношенні (3.81) дає інтегральну показникову функцію $Ei(x)$, що при $x=0$ має логарифмічну особливість. Тому при $\eta = \gamma$ дотичне напруження в околі точки $\xi = 0$ також має логарифмічну особливість.

За результатами аналізу отриманих розв'язків даної задачі на рис. 3.7-3.8 представлена залежність величини напруження у стрижні та контактного зусилля взаємодії між стрижнем

та пластиною від величини $h = \ln \frac{R_1}{R_0}$ пластини при різних значеннях параметра ε .

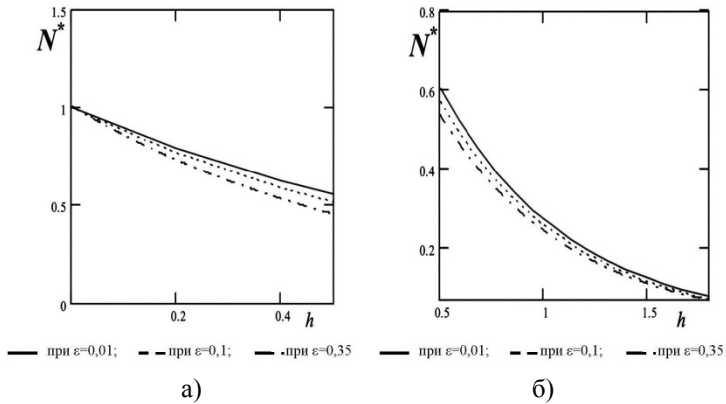


Рис. 3.7 . Розподіл зусиль у стрижні залежно від значень ε : (а) для $0.1 < h < 0.5$; (б) для $h > 1$

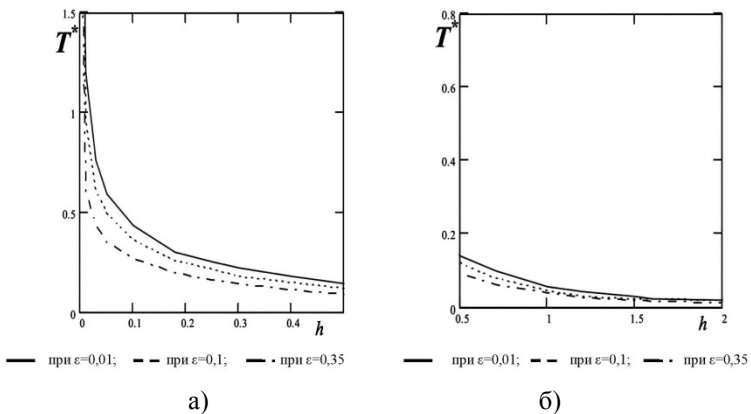


Рис. 3.8. Розподіл зусиль контактної взаємодії залежно від значень ε : (а) для $0.1 < h < 0.5$; (б) для $h > 1$

З рисунків 3.7 б) і 3.8 б) видно, що при $h > 1$ ($\frac{R_1}{R_0} > 2.5$) значення R_1 перестає враховувати розподіл напружень у стрижні і зусилля їх

контактної взаємодії, тобто у цьому випадку придатні розв'язки задачі для напівнескінченної пластини (3.59), (3.66), (3.81), (3.83).

ВИСНОВКИ

Анізотропія пружного середовища зазвичай призводить до суттєвих труднощів при розв'язанні крайових задач. Однак застосування розробленого авторами методу збурень дозволило використовувати характеристики анізотропії пружного середовища в якості параметрів асимптотичного інтегрування. В результаті вдалося розщепити напружено-деформований стан пластини, зчепленої зі стрижнем, на дві складові, що володіють різними властивостями. Крайова задача теорії пружності звелася до послідовного розв'язування задач теорії потенціалу, а рішення вихідного завдання визначилося як суперпозиція зазначених складових. Ефективність розробленого методу збурень показана на відомих розв'язках задач про пластини з отворами.

Розглянуто задачі про передачу навантаження від підкріплюючого елемента до пластини зі складними властивостями.

Визначений закон розподілу контактних напружень між стрингером та пластиною, а також зусилля в стрингері при умові його навантаження в кінцевих точках поздовжніми силами.

Побудовано графічні залежності. Проаналізовано характер особливостей в граничних точках.

АНОТАЦІЯ

Дана робота присвячена аналітичному розв'язанню задач теорії пружності з урахуванням криволінійної анізотропії матеріалу. Розглядаються осесиметричні контактні задачі про передачу навантаження від стержня до пружних напівскінченних та скінченних ортотропних пластин з циліндричною анізотропією. Визначається закон розподілу контактних напружень між стрингером та пластинкою, а також зусилля в стрингері при умові його навантаження в кінцевих точках поздовжніми силами. Для розв'язання використовується розроблений авторами асимптотичний метод. У якості малого параметра обирається відношення жорсткісних характеристик матеріалу. Ефективність методу перевіряється на відомих задачах про пластини з отворами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Д'яченко Н.М. Розв'язання плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за нелінійними законами / Н.М. Д'яченко, В.В. Мухін, В.Ю. Містюк, А.К. Юрченко. *Вісник Запорізького національного університету*. 2018. № 2. С. 29-43. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04
2. Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : монографія Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. 160 с
3. Максимович О.В. Розрахунок напружень біля штампів, отворів та тріщин у композитних пластинчастих елементах конструкцій : монографія / О.В. Максимович, С.В. Лавренчук, А.Ю. Коцюба// Луцьк : Луцький НТУ, 2018. 132 с.
4. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев-Донецк : Вища школа, 1982, 152 с.
5. Гоменюк С.І., Спиця О.Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с.
6. Radi, E; Nobili, Frictionless contact problem between a loaded beam and a couple stress elastic half-plane / Radi, E; Nobili, A. – (2022). ((Intervento presentato al convegno 11th European Solid Mechanics Conference tenutosi a Galway, Ireland nel 4 – 8 July 2022. <https://hdl.handle.net/11380/1283441>.
7. Yaylaci M., Abanoz M., Yaylaci E. U., Ölmez H., Sekban D. M., Birinci A. Evaluation of the contact problem of functionally graded layer resting on rigid foundation pressed via rigid punch by analytical and numerical (FEM and MLP) methods / *Archive Of Applied Mechanics*, 2022 (Sci-Expanded). Doi Numarası: 10.1007/s00419-022-02159-5.
8. Кагадій Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монография. Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1998. 260 с.
9. Кагадій Т.С., Напружено деформований стан шаруваті основи з підкріплюючим елементом. / Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта, О.В.Білова, І.В. Щербина // *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 3. № 2.1, 2020. С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>.
10. Kazberuk A. A unified approach to determination of stress concentration near sharp and rounded notches in quasi-orthotropic plane /A. Kazberuk, M. Savruk, A. Chornenkyi. *Сучасні проблеми*

механіки та математики : збірник наукових праць. Львів : ІППММ НАНУ. 2018. С. 107–108.

11. Горик О.В. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат / О.В. Горик, С.Б. Ковальчук. Міжвузівський збірник «*Наукові нотатки*». Луцьк, 2018. Вип. № 63. С. 89-97.

Information about the authors:

Kagadiy Tetiana Stanislavivna,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Applied Mathematics
Dnipro University of Technology
Yavornytsky D. avenue, 19, Dnipro, 49005, Ukraine

Scherbina Irina Volodymyrivna,

Candidate in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics,
Physics and General Engineering Disciplines,
Dnipro State Agrarian and Economic University
S. Efremova str., 25, Dnipro, 49000, Ukraine