

APPLIED MECHANICSDOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-340-8-4>**INDIVIDUAL CASES OF CONSTRUCTION OF SPATIAL CURVES
AS A FUNCTION OF ARC LENGTH WITH GIVEN DEPENDENCES
OF CURVATURE AND ANGLE OF ASCENT****ОКРЕМІ ВИПАДКИ КОНСТРУЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ
КРИВИХ У ФУНКЦІЇ ДОВЖИНИ ДУГИ ІЗ ЗАДАНИМИ
ЗАЛЕЖНОСТЯМИ КРИВИНИ ТА КУТА ПІДЙОМУ****Kresan T. A. Кресан Т. А.**

*Candidate of Technical Sciences, Associate
Professor,
Associate Professor of the Department of
Natural, Mathematical and General
Engineering Disciplines
Separated Subdivision National University
of Life and Environmental Sciences of
Ukraine «Nizhyn Agrotechnical Institute»
Nizhyn, Chernihiv region, Ukraine*

*кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри природничо-
математичних та загальноінженерних
дисциплін
Відокремлений підрозділ Національного
університету біоресурсів і
природокористування України
"Ніжинський агротехнічний інститут"
м. Ніжин, Чернігівська область, Україна*

Pylypaka S. F. Пилипака С. Ф.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Graphic
Geometry, Computer Graphics and Design
National University of Life and
Environmental Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine*

*доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри нарисної геометрії,
комп'ютерної графіки та дизайну
Національний університет біоресурсів і
природокористування України
м. Київ, Україна*

Petryk A. M. Петрик А. М.

*Lecturer
Nizhyn Vocational College of the National
University National University of Life and
Environmental Sciences of Ukraine
Nizhyn, Chernihiv region, Ukraine*

*викладач
ВСП «Ніжинський фаховий коледж
Національного університету біоресурсів
і природокористування України»
м. Ніжин, Чернігівська область, Україна*

Задачі формоутворення плоских кривих в основному полягають в забезпеченні їх проходження через задані точки, із заданим кутом нахилу

дотичних, у формуванні обводів та дотриманням інших умов. Дослідження в цьому напрямі ведуться із використанням сплайнів та поліномів [1]. Серед різноманіття формоутворення просторових кривих особливе місце займають криві, описані рівняннями у функції довжини власної дуги. Такі рівняння зручно використовувати, коли довжина дуги кривої є інваріантом її перетворення.

Випадок 1. Загальний випадок конструювання кривої. За горизонтальну проекцію просторової кривої візьмемо коло одиничного радіуса, тобто $k_f=1$. Нехай тангенс кута β змінюється за лінійним законом: $\text{tg}\beta=s$.

Необхідні вирази для подальших розрахунків будуть:

$$\beta = \text{Arctg} s; \quad \beta' = \frac{1}{1+s^2}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}. \quad (1)$$

Кривину вказаної кривої можна визначити за формулою:

$$k = \sqrt{\beta'^2 + k_f^2 \cos^4 \beta} = \frac{\sqrt{2}}{1+s^2}. \quad (2)$$

Підстановка призводить до інтегрування наступних виразів:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\cos(\text{Arc sinh } s)}{\sqrt{1+s^2}} ds = \sin(\text{Arc sinh } s); \\ y &= \int \frac{\sin(\text{Arc sinh } s)}{\sqrt{1+s^2}} ds = -\cos(\text{Arc sinh } s); \\ z &= \int \sin(\text{Arctg } s) ds = \sqrt{1+s^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

За параметричними рівняннями (3) на рис. 1,а побудовано криву на циліндрі одиничного радіуса при зміні дуги s в межах $s=-5\dots5$.

З диференціальної геометрії відомо, що при згинанні тора закономірність зміни кривини його ребра звороту залишається незмінною, а змінюється лише скруг.

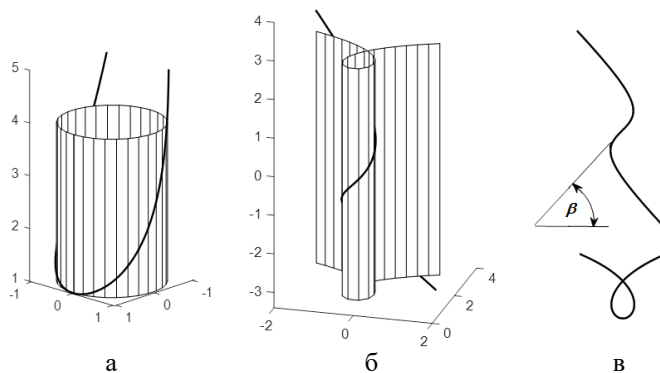


Рис. 1. Просторові криві однакової довжини:
а) крива, побудована за рівняннями (3); б) крива укосу,
побудована за рівняннями (5); в) проекції кривої укосу із
зазначенням кута β

Випадок 2. Покажемо трансформування кривої (3) зміною залежності $\beta = \beta(s)$. Розглянемо частковий випадок, коли $\beta = \text{const}$.

В цьому випадку залежність $k = k(s)$ зберігається. Необхідні вирази для подальших розрахунків будуть:

$$k = \frac{\sqrt{2}}{1+s^2}; \quad \beta = \text{const}; \quad \beta' = 0. \quad (4)$$

Підстановка (4) у (2) призводить до виразів які вдається проінтегрувати тільки частково:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \left(\frac{\sqrt{2} \text{Arctg} s}{\cos \beta} \right) ds; \\ y &= \cos \beta \int \sin \left(\frac{\sqrt{2} \text{Arctg} s}{\cos \beta} \right) ds; \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Для деяких значень кута β вирази (5) вдається проінтегрувати. Наприклад, для $\beta = \pi/4$ ми отримуємо наступні рівняння кривої укосу:

$$x = \sqrt{2} \text{Arctg} s - \frac{s}{\sqrt{2}}; \quad y = -\sqrt{2} \ln \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}; \quad z = \frac{s}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Крива, побудована за рівняннями (5), зображена на відповідному циліндрі (рис. 1, б) та в проєкціях (рис. 1, в).

Випадок 3. Крива укосу задана кутом $\beta = \text{const}$ і залежністю кривини $k = a/s$.

При $\beta = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \left(\int \frac{k}{\cos \beta} ds \right) ds ; \\ y &= \cos \beta \int \sin \left(\int \frac{k}{\cos \beta} ds \right) ds ; \\ z &= s \sin \beta . \end{aligned} \tag{7}$$

Підставимо вираз кривини $k = a/s$ у (7) і після інтегрування отримаємо параметричні рівняння кривої укосу:

$$\begin{aligned} x &= \frac{s \cos^2 \beta}{a^2 + \cos^2 \beta} \left(\cos \beta \cos \frac{a \ln s}{\cos \beta} + a \sin \frac{a \ln s}{\cos \beta} \right) ; \\ y &= \frac{s \cos^2 \beta}{a^2 + \cos^2 \beta} \left(\cos \beta \sin \frac{a \ln s}{\cos \beta} - a \cos \frac{a \ln s}{\cos \beta} \right) ; \\ z &= s \sin \beta . \end{aligned} \tag{8}$$

Якщо знайти другі похідні рівнянь (8) і підставити у формулу (7), то ми отримаємо вираз кривини, який був заданий, тобто $k = a/s$. Отже залежність кривини від довжини дуги не змінюється для будь-якого кута підйому β , в тому числі і для $\beta = 0$, тобто для плоскої кривої.

На рис 2,а,б побудовано криву в проєкціях за рівняннями (8) при $a=15$, $\beta=\pi/10$. Вона є конічною лінією укосу, її горизонтальною проєкцією є логарифмічна спіраль, натуральне рівняння якої можна знайти за формулою (10). При зменшенні кута β нахил твірних конуса φ зменшується і при $\beta=0$ конус перетворюється у площину, а просторова крива – у плоску (рис. 1,в). Таким чином, при трансформації конічної лінії укосу із збереженням її натурального рівняння $k = a/s$ її горизонтальна проєкція теж трансформується, залишаючись логарифмічною спіраллю [2; 168].

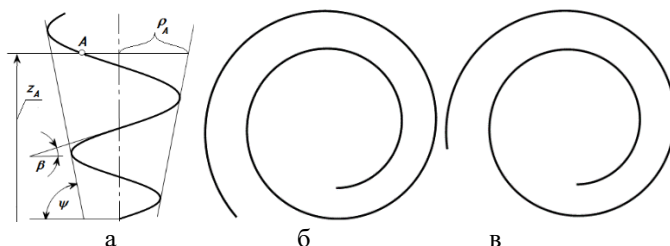


Рис. 2. Проекції кривої укусу із заданим натуральним рівнянням $k=a/s$:
а) фронтальна проекція ($\beta=\pi/10$); б) горизонтальна проекція ($\beta=\pi/10$);
в) горизонтальна проекція ($\beta=0$, плоска крива)

При $k=const$ формули (7) дають циліндричну лінію укусу (гвинтову лінію).

Література:

1. Laszlo Nemeth Rose. Curves with Chebyshev Polynomials. *J. Geometry Graphics* 19/2, 2015, Pp. 219–226. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg19/j19h2neme.pdf>
2. Pylypaka S., Kresan T., Trokhaniak O., Taras, I., Demchuk I. Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent. *Journal for Geometry and Graphics* Volume 25, 2021, № 2, Pp. 163–170. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf>
3. Soukaina Ouarab, Amina Ouazzani Chahdi, Malika Izid. Ruled Surface Generated by a Curve Lying on a Regular Surface and its Characterizations. *J. Geometry Graphics*, 24/2, 2020, Pp. 257–267. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg24/j24h2ouar.pdf>