# MODELLING OF DYNAMIC DATA SERIES: ANALYSIS OF MODELS FOR THEIR USE IN TAX REVENUE FORECASTING

# МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ: АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ З МЕТОЮ ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ПРОГНОЗУВАННІ ПОДАТКОВИХ НАДХОДЖЕНЬ

**Tereshchenko L.O.**[1]

DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-351-4-10

Під час прогнозування та ухвалення бюджету надзвичайно гостро стає проблема оцінки величини податкових надходжень на наступний рік. Кожен рік процес прийняття нового бюджету викликає в парламентських та урядових колах жорсткі дискусії про можливі джерела його фінансування. Тому, проблема розробки і апробації принципово нових методів прогнозу податкових надходжень займає одне з основних місць у спектрі проблем створення системи підтримки прийняття рішень по науково-обґрунтованому управлінню економікою на рівні держави, окремих регіонів, міст.

В Україні проблема податків – одна із найбільш складних і суперечливих, зокрема, у контексті запроваджуваних реформ. Мабуть немає сьогодні другого аспекту економічної політики, який піддавався б такій серйозній критиці і був би предметом таких гострих дискусій.

Наукове дослідження виконано згідно з планом наукових досліджень ПВНЗ «Український гуманітарний інститут» і є темою кафедри економічної кібернетики, фінансів та менеджменту: «Комп'ютерне моделювання соціально-економічних процесів в галузях економіки та освіти» (державний реєстраційний номер: 0121 U 113073. Дата реєстрації: 22-09-2021).

В статті автором виконані роботи по аналізу моделей з метою їх використання у прогнозуванні податкових надходжень, підбору прогнозної моделі.

---

[1] Candidate of Economic Sciences, Full Professor,
Ukrainian Institute of Arts and Sciences

Розглянемо і введемо деякі поняття, які нам будуть потрібні у подальшому для висвітлення нашого питання.

Перш за все за якими ознаками класифікуються ряди динаміки. Вони поділяються на моментні та інтервальні. Моментні відповідають значенню показника у певний момент часу, інтервальні характеризують показник за певний період.

Що стосується часових рядів, то вони підрозділяють на стаціонарні і нестаціонарні (еволюційний). Стаціонарний динамічний ряд не містить тенденції щодо зміни тренду, нестаціонарний (еволюційний) ряд має змінний тренд.

Поняття «тренд» характеризує певну тенденцію щодо поступової зміни показника, котрий описується динамічним рядом. Існує ціла множина методів, зокрема і математичних, для обчислення тренду.

В аналізі динамічних рядів використовуються також поняття сезонності (циклічності), що характеризують тенденції даного ряду і поняття випадкового відхилення, що повторюється. Випадкове відхилення, чи випадкова компонента, фіксує одномоментні зміни динамічного ряду під впливом певних випадкових чинників чи невідомих нам причин. Для усунення випадкових відхилень застосовуються різні методи згладжування.

У теорії динамічних рядів існують також інші, більш складні, терміни та визначення, котрі будуть описуватись у подальшому, стосовно до мети нашого дослідження. Необхідно зазначити, що вивченням динамічних рядів займаються різні школи, тому деякі терміни треба сприймати виважено. Дослідження динамічних рядів здійснюються з різною метою, тому й підходи, які застосовуються, та відповідні математичні моделі залежать від постановки задачі. Потрібно відмітити, що досить вичерпний аналіз динамічних рядів вимагає розробки відповідних адекватних, щодо мети дослідження і прийнятої системи гіпотез, математичних підходів та моделей, які дозволяють розкласти процеси, що спостерігаються, на складові і визначити їх взаємний вплив. На основі теорії випадкових (стохастичних) процесів проводиться. дослідження зміни показників у їх динаміці.

Для формалізованого опису динаміки поведінки досліджуваних процесів, що відбуваються у системі оподаткування введемо наступні позначення.

Реалізацією випадкового процесу назвемо послідовність n результатів спостережень $y_1, y_2, \ldots, y_n$ деякого економічного процесу в моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Послідовність спостережень ($y_i$), отриманих у рівновіддалені моменти часу, будемо називати динамічним або часовим рядом, а відповідну йому ймовірнісну модель – випадковим процесом із дискретним часом [3].

З кожним випадковим процесом $\xi_t$ звичайно пов'язують одну або декілька функцій. Такими функціями можуть бути: математичне сподівання, дисперсія, взаємокореляційна й автокореляційна функції тощо.

Математичне сподівання представляє усереднення випадкових значень функції $\xi(t)$ для кожного заданого моменту часу, навколо якого групуються результати спостережень. Ступінь розсіювання цих спостережень навколо середнього значення характеризується дисперсією процесу і тому може бути використано у якості одного з статистичних показників при дослідженні процесів, що відбуваються у системі оподаткування.

Так як дисперсія випадкового процесу $\xi_t$ є невипадкова функція $D[\xi_t]$, яка залежить від часу, значення якої при кожному фіксованому моменті часу $t = t_i$ дорівнюють дисперсії $D[\xi_{ti}]$ випадкової величини $\xi_t$, розглянутої в момент часу $t$ [3], то її також можна використовувати у якості оцінки відповідних процесів.

Отже, вже при розгляді математичного сподівання і дисперсії випадкового процесу видно, що він мав би розкладається на деяку систематичну складову (середню) і циклічні та випадкові відхилення від неї. При аналізі часових рядів це знаходить своє практичне вираження в представленні часового ряду $yt$ у вигляді суми:

$$yt = f(t) + \varepsilon_t,$$

де $f(t)$ – деяка невипадкова функція часу;

$\varepsilon_t$ – випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією, яка дорівнює $D[\varepsilon_t]$ [3].

Функція $f(t)$, що характеризує детерміновану частину часового ряду $y_t$, являє собою тренд, який відбиває вплив деяких постійно діючих чинників: технічного прогресу, зростання населення, кооперування, зростання доходів тощо.

Складову $\varepsilon_t$, що відповідає відхиленням від тренда, обумовленим впливом на процес яких-небудь випадкових чинників, назвемо випадковим компонентом часового ряду $y_t$. Випадковий компонент характеризує такий вплив випадкових чинників (цінові шоки, економічні та фінансові кризи, девальвація національної валюти тощо), який буває важко оцінити. Застосування теорії випадкових процесів до аналізу економічних рядів значною мірою пов'язано з необхідністю досліджувати випадкову компоненту $\varepsilon_t$ та порівнювати її з іншими випадковими величинами, що мають відомі властивості, обчислювати статистичні характеристики випадкового компонента тощо.

У подальшому, при дослідженні системи оподаткування, зокрема, обсягів податкових надходжень будемо використовувати різні типи процесів, а саме: стаціонарні процеси у вузькому розумінні (випадкові процеси, імовірнісні властивості яких не залежать від часу); стаціонарні процеси в широкому розумінні (коли математичне сподівання ~ стала величина, а автокореляційна функція, яка визначається як ~ $M(x(t) * x(t+\tau))$, є функцією часового лагу $\tau$) [3].

Надалі виразом «стаціонарний процес» будемо позначати стаціонарний процес у широкому розумінні. Однією з найважливіших властивостей стаціонарного випадкового процесу є ергодичність. Вона полягає в тому, що кожна окрема реалізація випадкового процесу є мовби «повноважним» представником усієї сукупності можливих реалізацій. Звідси основні характеристики для ергодичних процесів можна приблизно обчислювати не за декількома реалізаціями, як це робиться в загальному випадку, а за якоюсь однією реалізацією, взятою за досить великий проміжок часу (хоча це не завжди можливо). Ця властивість використовується в подальшому для аналізу податкових надходжень [3].

Для аналізу економічних явищ достатньо розглядати випадкові процеси стаціонарні лише протягом того проміжку часу, в якому проводиться дослідження і робиться прогнозування. Надалі ми будемо розглядати стаціонарні процеси з нульовим математичним сподіванням. Дійсно, якщо досліджується процес із постійним і відмінним від нуля математичним сподіванням $M[\xi_t]$, то можна обчислити оцінку математичного сподівання $\widehat{\mathrm{M}}[y_t]$, тобто процес $\varepsilon_t = y_t - \widehat{\mathrm{M}}[y_t]$ вже буде мати нульове математичне сподівання [3].

У багатьох дослідженнях якогось певного випадкового процесу головною метою є приведення його, за допомогою ряду перетворень, до стаціонарного випадкового процесу. Як приклад, розглянемо випадковий процес із стаціонарним зростанням.

Випадковий процес $\xi_t$ називають процесом із стаціонарними збільшеннями, якщо за будь-якого фіксованого тимчасового зрушення $\tau$ різницевий процес $\xi_t - \xi_{t-\tau}$ залишається стаціонарним. Практично це означає, що коли розглядати податкові надходження $\xi_t$, то їх значення представлятимуть часовий ряд, який має визначений тренд, відхилення від відповідних значень якого утворюють стаціонарний випадковий процес.

Введемо більш загальне поняття випадкового процесу $\xi_t$ із стаціонарними зростанням n-го порядку, для якого [3]:

$$\Delta^{(n)}\, \xi_t = \xi_t - n\xi_{t-\tau} + C_n^{\,2}\xi_{t-2\tau} + \ldots + (-1)^n\xi_{t-n\tau}.$$

якщо $n = 2$, $\tau = 1$,

то, $\Delta^{(2)}\, \xi_t = \xi_t - 2\xi_{t-1} + \xi_{t-2}$,

де $\xi_t$ являє собою стаціонарний випадковий процес другого порядку.

Зокрема, випадковий процес із стаціонарним збільшенням 2-го порядку відбиває зміни економічного показника, що має постійні прирости впродовж розглянутого інтервалу часу. Це означає, що досліджуваний економічний процес розвивається в середньому з постійним прискоренням.

З погляду економічних досліджень в області часових рядів найбільш актуальними, є задачі розкладання, згладжування і прогнозування до яких відносяться [3]:

1. Припустимо є реалізація часовий ряд $\{y_t\}$ деякого випадкового процесу $\xi_t$. Потрібно визначити найкращим способом оцінку деякого невипадкового компонента – тренда – $f(t)$, яка у кожний фіксований момент часу є середнє значення випадкової величини $\xi_t$ і відбиває основні закономірності зміни досліджуваної характеристики в часі.

Розв'язання задачі згладжування, тобто побудова статистичної оцінки $f(t)$ для істиного, невідомого нам тренда $f(t)$ на підставі наявної реалізації $\{y_{ti}\}$ ($i = 1, 2,..., n$) досліджуваного процесу $\xi_t$, дозволяє просунутися і у розв'язанні задач розкладання і прогнозування.

2. Задача розкладання полягає в аналізі чинників та у виокремленні серед них регулюючих і випадкових, а потім серед головних – періодичних, сезонних тощо.

3. За наявними спостереженнями $y_1, y_2, ..., y_n$ процесу $\xi_t$ треба передбачити його значення на періоди $t_{n+1}$, $t_{n+2}$, …, $t_{n+1}$. Подібна постановка задачі цілком коректна, тому що значення процесу $\xi_t$ у будь-який момент часу ti часто залежить від значення даного процесу в попередні моменти часу. Задача прогнозування, як правило, містить попередній етап – розв'язання задачі згладжування.

Підхід, згідно з яким випадковий процес поділяється на дві компоненти – детерміновану і випадкову, є недостатнім для низки економічних процесів, для яких характерна псевдоперіодичність, пов'язана як із економічними циклами, так і з впливом сезонності на економічні показники.

У більш складній адитивній моделі процес $x(t)$ описується рівнянням [1; 2]:

$$x(t) = L_t + C_t + S_t + I_t,$$

де $L_t$ – характеризує тенденцію процесу (трендова складова);

$C_t$ – довгоперіодна (2-5 років) циклічна складова, що накладається на трендову тенденцію;

$S_t$ – сезонна компонента процесу;

$I_t$ – іррегулярна випадкова компонента;

$t$ – час.

При цьому передбачається, що зміни, пов'язані із сезонністю, накладаються (додаються) на трендову складову, наприклад, кожне літо продаж морозива збільшується на деяку суму. Якщо ж ситуація дещо інша, наприклад, щороку продаж морозива збільшується на 60%, то краще застосувати мультиплікативну модель:

$$x(t) = L_t * C_t * S_t * I_t$$

Якщо часового інтервалу недостатньо для виявлення довгоперіодних економічних циклів (а в нашому випадку, як приклад, інтервал у чотири роки є недостатнім для розв'язання такої задачі), то використовується об'єднана трендово-циклічна компонента ($L_tC_t$), що характеризує довгоперіодну тенденцію розвитку, яка зберігає свій знак на всьому інтервалі спостереження.

У мультиплікативній моделі, на відміну від адитивної, розмірність процесу $x(t)$ має тільки $L_tC_t$ – компонента (трендова). Складові $S_t$ і $I_t$ мають величини близькі до 1 і представляють у явному вигляді відсоток

($S_t$ – 100), який складає дана компонента щодо величини тренду. Модель тим краща, чим ближчі величини іррегулярної компоненти до 100 [1; 2].

Нестаціонарні процеси, тобто процеси, що зводяться до стаціонарного виду шляхом використання різницевого оператора, не описують усе різномаїття часових економічних рядів. Ще в 1963 році було відзначено, що великі трендові зміни цін ведуть до значних амплітуд коливань, а малі зміни до – малих. Методи розроблені в 80–90-х роках дають інструмент для прогнозу майбутньої нестабільності [3]. З цією метою було введене поняття моделі авторегресійної умовної гетероскедастичності ARCH (Autoregressive conditional heteroscedasticity). Узагальнення цих процесів призвело до створення моделі GARCH (General Autoregressive conditional heteroscedasticity).

Сенс застосування у фінансах моделей GARCH і ARCH полягає в тому, що вони визначають статистичний взаємозв'язок між коливаннями ризику цінних паперів і величиною премії за ризик, необхідної посередникам при дослідженні обігу цінних паперів.

Для більш досконалого опису цих моделей введемо поняття умовного математичного сподівання:

$$m_t = E(Y_t / F_{t-1}),$$

котре означає, що математичне сподівання змінної $Y$ у момент часу $t$ залежить від значення змінної $F$ у момент часу $t-1$ або від інформації, що надійшла про змінну $F$ на момент часу $t-1$.

Множина $F$ містить у собі будь-які джерела інформації, тому, зокрема, це може бути $Y_{t-1}$. У цьому випадку ми приходимо до звичайного авторегресійного рівняння з одиничним кроком (AR(1)):

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

де $m_t$ визначається як:

$$m_t = \sum_{t=1}^{n} Y_t / n \; .$$

Дисперсія в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$h_t^2 = E\left[ (Y_t - m_t)^2 / F_{t-1} \right].$$

Як функцію минулих залишків, ht можна знайти з рівняння:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \; .$$

Для стаціонарних процесів дисперсія не залежить від часу, насправді існує низка економічних рядів, дисперсія яких змінюється з плином часу. При використанні моделі ARCH передбачається, що залишки $\varepsilon_t$ мають дисперсію $h_t^2$ яка змінюється у часі [3]:

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t^2 z} ,$$

де $z$ – нормально розподілена змінна з одиничною дисперсією і нульовим середнім: ($z = (N(0;1))$.

Для моделі ARCH(p) дисперсію можна подати у вигляді наступного співвідношення:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{P} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 .$$

де $p$ – число кроків авторегресії.

Ця модель зазнала деяких трансформаційних перетворень за рахунок узагальнення моделі ARCH шляхом виключення попередніх значень умовної дисперсії, для уникнення багатокрокової структури ARCH($g$) (Баллерслев – 1986). Таким чином узагальнення ARCH або GARCH ($p, g$) визначає умовну дисперсію як лінійну комбінацію $p$ квадратів залишків і g попередніх значень умовної дисперсії:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{g} \beta_j h_{t-j}^2,$$

де параметри $\alpha, \beta \geq 0$, щоб уникнути ймовірності виникнення негативних значень умовної дисперсії [4].

Основна сфера застосування моделей ARCH і GARCH – прогнозування курсів валют, де гетероскедастичність є суттєвою і істотною властивістю процесу встановлення курсу. Конкретним прикладом таких гетероскедастичних процесів є процес **Іто**, при цьому ціна S цінного паперу відповідає стохастичному диференційному рівнянню [3]:

$$dS = uSdt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt} ,$$

де $u$ – визначає швидкість зміни вартості цінних паперів,

σ – швидкість зростання дисперсії їхньої ціни,

$t$ – час,

$\varepsilon = N(0;1)$.

Розглянемо модель простого ковзного згладжування, яка має загальний вигляд при згладжуванні за *n* точками [6].

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_{t-i} \ .$$

У цьому випадку використовуються тільки попередні спостереження, що ведуть до зсуву процесу за фазою. Тому краще використати схему центрального ковзного середнього ($n = 2\ P+1$):

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=-p}^{p} y_{t+i} \ .$$

Головною особливістю цього методу є те, що всі спостереження використовуються з однією вагою $1/n$. Існує інший метод згладжування, коли використовуються також тільки попередні значення, але вага цих значень зменшується з віддаленням. Це – метод експоненційного згладжування:

$$\tilde{y}_t = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k\ y_{t-k}.$$

Якщо покласти $t = t - 1$, то отримаємо:

$$\tilde{y}_{t-1} = a\sum_{k=1}^{\infty}(1-a)^{k-1} y_{t-k} \ .$$

З двох виразів шляхом віднімання можна отримати:

$$\widetilde{y_t} = ay_t + (1-a)\,y_{t-1} \ .$$

Якщо $\alpha$ наближається до 1, то більш вагомі значення наближені до $y_t$ – незначне згладжування, якщо $\alpha$ прямує до 0, то ми отримаємо більш суттєве згладжування і віддалені попередні значення матимуть більший вплив. Якщо необхідно отримати значне згладжування, не використовуючи значення процесу значно віддалені в часі (мале $\alpha$), то краще використати подвійне експоненційне згладжування – Браунівське згладжування [5].

Вираз для подвійного експоненційного згладжування має вигляд:

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}_t = \boldsymbol{a}\tilde{\boldsymbol{y}}_t + (1-\boldsymbol{a})\,\tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{t-1} \ .$$

Коли існує значний часовий тренд (змінюється середнє), який необхідно врахувати при прогнозуванні, то використовують двопараметричний метод Холтівського експоненційного згладжування. Обидва параметри $\alpha$ і у менші від одиниці, але більші від нуля. Процес експоненційного згладжування Холта задається виразом:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_t = \alpha \boldsymbol{y}_t + (1-\alpha)(\tilde{\boldsymbol{y}}_{t-1} + \boldsymbol{r}_{t-1});$$
$$\boldsymbol{r}_t = \gamma(\tilde{\boldsymbol{y}}_t - \tilde{\boldsymbol{y}}_{t-1}) + (1-\gamma)\boldsymbol{r}_{t-1},$$

де $r_t$ – згладжений показник лінійного зростання на час ($t$) вихідного ряду.

Тоді, якщо потрібно виконати прогнозування на $l$ кроків вперед, то відповідний вираз для прогнозного буде:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{T+l} = \tilde{\boldsymbol{y}}_T + \boldsymbol{l}\boldsymbol{r}_T .$$

*Модель випадкового «блукання»* є найпростішим прикладом стохастичного процесу, коли приріст досліджуваної змінної $\boldsymbol{y}_t$ є випадковою величиною, що має нульове середнє [1; 2; 6]:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

де $\boldsymbol{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \boldsymbol{E}(\varepsilon_t, \varepsilon_S) = \begin{cases} 0 & \textit{для } \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{S} \\ \sigma_\varepsilon^2 & \textit{для } \boldsymbol{t} = \boldsymbol{S} \end{cases}$ .

Якщо виконується прогнозування для процесу випадкового «блукання», то вираз для $y_{t+1}$ можна представити як умовне математичне сподівання: $\tilde{y}_{t+1} = E(\boldsymbol{y}_{t+1} / \boldsymbol{y}_t, \ldots, \boldsymbol{y}_1)$.

Тоді: $\boldsymbol{y}_{T+1} = \boldsymbol{y}_T + \varepsilon_{T+1}$,

тому що при прогнозуванні на один крок: $E(y_{T+1}) = \widehat{y}_{T+1} = y_T + E(\varepsilon_{T+1}) = y_T$ .

Прогнозування на $l$ кроків наперед також має значення $y_T$: $\widehat{y}_{T+l} = y_T$ .

Що стосується дисперсії похибки прогнозу випадкового «блукання», то вона зростає пропорційно $l$ і має вигляд: $\boldsymbol{E}(\varepsilon_l^2) = \boldsymbol{l}\sigma_\varepsilon^2$ .

За умови, коли в процесі присутня нестаціонарність (наприклад лінійний тренд), можна використати процес випадкового блукання з зміщенням:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{d} + \varepsilon_t ,$$

тоді прогноз на крок вперед буде мати наступний вигляд: $\widehat{y}_{T+1} = \boldsymbol{y}_T + \boldsymbol{d}$ ,

а прогноз на $l$ кроків вперед, відповідно, можна обчислити за допомогою наступного співвідношення: $\widehat{y}_{T+l} = \boldsymbol{y}_T + \boldsymbol{l}\boldsymbol{d}$ .

Зазначимо, що залежність дисперсії похибок прогнозу від $l$ залишилася такою, як і в попередньому випадку.

*Змішана авторегресійна модель та модель ковзного середнього (ARMA)*. Двома параметрами $p$ та $q$ задається порядок змішаної моделі. Порядок авторегресії визначає перший параметр, моделі ковзного середнього – другий [1; 2; 6]:

$$y_t = \Phi_1 y_{t\text{-}1} + \Phi_2 y_{t\text{-}2} + \ldots + \Phi_p y_{t\text{-}p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t\text{-}1} - \theta_2 \varepsilon_{t\text{-}2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t\text{-}q}, \quad (1)$$

де $y_t$ – величина досліджуваного процесу на момент часу $t$ ($t$=1, 2,...,$T$);

$\theta_1$, $\theta_2$... $\theta_q$ – коефіцієнти моделі ковзного середнього;

$\Phi_1$, $\Phi_2$,…,$\Phi_P$ – авторегресійні коефіцієнти;

$\varepsilon_t$ – «білий шум»;

$\delta$ – параметр, що визначає середнє значення;

$T$ – кількість спостережень.

Якщо процес $y$ – стаціонарний, тобто статистичні характеристики не залежать від часу, то правильним буде співвідношення:

$$E(y) = \mu = \delta /(1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \ldots - \Phi_p). \quad (2)$$

Вираз (2) дозволяє визначити необхідну умову стаціонарності процесу:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_P < 1. \quad (3)$$

Простіша модель авторегресійного процесу ковзного середнього ARMA (1;1) має вигляд:

$$y_t = \Phi_{yt\text{-}1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t\text{-}1}. \quad (4)$$

Для визначення властивостей моделей ARMA ($p; q$) розглянемо окремо процеси ковзного середнього і авторегресійну модель.

Модель ковзного середнього *MA(q)*, де $q$ – порядок моделі, визначимо рівнянням:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t\text{-}1} - \theta_2 \varepsilon_{t\text{-}2} -\ldots- \theta_q \varepsilon_{t\text{-}q}. \quad (5)$$

Оскільки за визначенням $\varepsilon_t$ – «білий шум», то

$$E(\varepsilon_t) = 0;\ E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2;\ E(\varepsilon_t \varepsilon_{t\text{-}k}) = 0,\ (k \neq 0).$$

Звідси випливає, що: $E(y_t) = \mu$.

Окрім того, допускається, що $\varepsilon_t$ має нормальний розподіл. Процес ковзного середнього описується $q$ + 2 параметрами: середнім значенням $\mu$, дисперсією шуму $\sigma_\varepsilon^2$, а також параметрами $\theta_1$,$\theta_2$,…,$\theta_q$.

Визначення властивості «білого шуму» дозволяють також визначити дисперсію $y_t$:

$$\eta_0 = E(y_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\varepsilon_{t-1} + \theta_2^2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_k^2\varepsilon_{t-k} - 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \ldots) =$$
$$= \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots\ \theta_k^2). \qquad (6)$$

Хоча «білий шум» відносять до вузького класу процесів, але, коли використовується зважена сума процесу «білого шуму», цілком можливо отримати широкий клас процесів з властивостями, які значно відрізняються від процесу «білого шуму».

Оскільки дисперсія стаціонарного процесу (5) – величина обмежена, умова (6) накладає на $\theta$ наступні обмеження – $\theta_k$ повинно зменшуватись із зростанням $k$.

Розглянемо процес ковзного середнього першого порядку:

$$Y_t = M + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}.$$

Цей процес має середнє значення $M$ та дисперсію $\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2)$.

Визначимо коваріаційну функцію для однокрокового запізнення:

$$\eta_1 = E((y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)) = E(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})) = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2.$$

Якщо $k > 1$,

то: $\eta_k = E((\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-k-1})) = 0$.

Можна вважати, що цей процес має «пам'ять», яка дорівнює 1.

Відповідна автокореляційна функція:

$$\begin{cases} \rho(k) = \eta_k / \eta_0 = -\theta_1 / (1+\theta_1^2);\ k = 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = q \end{cases}.$$

Не проводячи розрахунків, можна навести загальний вигляд автокореляційної функції – моделі ковзного середнього $q$-порядку:

$$\begin{cases} \rho(k) = (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_k) / (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2);\ k = 1,\ldots,q \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k > q \end{cases}. \quad (7)$$

Другою складовою моделі ARMA є авторегресійна модель. Визначимо авторегресійний процес р-порядку (*AR(p)*) рівнянням:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t. \qquad (8)$$

Вважаючи авторегресійний процес стаціонарним, тобто:

$$E(y_{(t)}) = E(y_{(t-1)}) = \ldots = \mu,$$

знайдемо з рівняння (2) середню величину $\mu$:

$$\mu = \delta / (1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \ldots - \Phi_p). \qquad (9)$$

Для виконання умови стаціонарності (середня незростаюча) необхідно:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_p < 1. \tag{10}$$

Наприклад, якщо розглянути процес випадкового блукання, то:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t. \tag{11}$$

Оскільки для нього $\Phi_1 = 1$, то $\mu = \infty$ (якщо $\delta > 0$, середнє необмежено зростає).

Розглянемо властивості авторегресійних моделей.

1. Авторегресійна модель першого порядку *AR(1)*:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t. \tag{12}$$

Середнє визначається:

$$\mu = \delta / (1 - \Phi_1); |\Phi_1| < 1.$$

Визначимо дисперсію для процесу з нульовим середнім ($\delta = 0$) $E(y_t)^2$:

$$\eta_0 = E((\Phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)^2) = E(\Phi_1^2 y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\Phi_1 y_{t-1}\varepsilon_t). \tag{13}$$

Оскільки: $E(y_{t-1}\varepsilon_t) = 0$, то:

$$\eta_0 = \delta_\varepsilon^2 / (1 - \Phi_1^2) \tag{14}$$

Опускаючи алгебраїчні розрахунки, запишемо вираз $E(y_t\, y_{t+k})$:

$$\eta_k = \Phi_1^k \eta_0 = (\Phi_1^k \sigma_\varepsilon^2) / (1 - \Phi_1^2). \tag{15}$$

Авторегресійна функція для процесу *AR(1)* має простіший вигляд: вона починається з $\rho(0) = 1$, а потім спадає, як геометрична прогресія $\rho(k) = \Phi_1^k$ для $k \geq 1$, при $|\Phi_1| < 1$.

2. Модель процесу *ARMA (1;1)*, описується рівнянням (4). Визначимо варіацію та коваріацію цього процесу.

Нехай $\delta = 0$, а це означає, що $\mu = 0$:

$$\eta_0 = E(y_t(\Phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})) = E(\Phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})^2 =$$
$$= \Phi_1^2\, y_{t-1}^2 - 2\Phi_1\theta_1 E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2. \tag{16}$$

Оскільки $E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$, отримаємо:

$$\eta_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 - 2\Phi_1\theta_1) / (1 - \Phi_1^2). \tag{17}$$

Аналогічно знайдемо:

$$\eta_1 = \sigma_\varepsilon^2(1 - \Phi_1\theta_1)(\Phi_1 - \theta_1) / (1 - \Phi_1^2). \tag{18}$$

Автокореляційну функцію розрахуємо відповідно за співвідношенням:

$$\rho(1) = \eta_1 / \eta_0 = (1 - \Phi_1\theta_1)(\Phi_1 - \theta_1) / (1 + \theta_1^2 - 2\Phi_1\theta_1); \tag{19}$$

$$\rho(k) = \Phi_1\rho(k\text{-}1), \text{ для } k \geq 2. \tag{20}$$

Тому, наприклад, якщо знайти, згідно з формулами (19), (20), автокореляційні функції *ARMA (1;1)* процесу, що має вигляд:

$$y_t = 0{,}8y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}9\varepsilon_{t-1},$$

то відповідна функція має такі табличні значення, при $\Phi_1 = 0{,}8$; $\theta_1 = 0{,}9$:

| **K** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\rho(k)}$ | 0,076 | 0,06 | 0,048 | 0,039 | 0,031 | 0,025 |

Для спрощення подальших розрахунків, введемо оператор що відображає лаг в оберненому напрямку, а саме: $B(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-1}$, $B^2(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-2}$, $B^n(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-n}$.

Використовуючи цей оператор, представимо рівняння (5) у вигляді:

$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)\varepsilon_t = \mu + \theta(B)\varepsilon_t, \tag{21}$$

де $\theta(B)$ – визначає поліном степені $q$ від оператора $B$.

Аналогічним шляхом можна представити авторегресійну модель *AR* у вигляді:

$$\Phi(B)y_t = \delta + \varepsilon_t.$$

3. В остаточному вигляді авторегресійну модель ковзного середнього ARMA($p;\ q$) можна подати:

$$\Phi(B)y_t = \delta + \theta(B)\varepsilon(\mathrm{t}), \tag{22}$$

де: $\Phi(B) = 1 - \Phi_1(B) - \Phi_2B^2 - \ldots - \Phi_pB^p$;

$$\theta(B) = 1 - \theta_1(B) - \theta_2B^2 - \ldots - \theta_qB^q.$$

З метою подальшого удосконалення методики дослідження процесів, що відбуваються у системі ДПА (Державна податкова адміністрація) і економічного середовища в якому ця система функціонує, розглянемо більш досконало техніку дослідження нестаціонарних процесів.

*Однорідні нестаціонарні процеси.* Для більшості економічних процесів не виконуються умови стаціонарності. Наприклад, ВВП у розвинутих країнах збільшується з часом, відповідно збільшується і обсяг податкових надходжень до бюджету.

Існує нескладний спосіб, який дозволяє уникнути нестаціонарності деяких процесів [1; 2; 6]. Процес $y_t$ називається однорідним нестаціонарним процесом $d$-порядку, якщо його можна звести до стаціонарного шляхом використання оператора різниці $(\Delta)^d$:

Позначимо різницевий процес $W_t$ через $\Delta^d\ y_t$, де $\Delta$ оператор який визначає першу різницю процесу, $d$ – порядок повторного виконання:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t\text{-}1};$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta\ y_t - \Delta\ y_{t\text{-}1} = y_t - y_{t\text{-}1} - y_{t\text{-}1} + y_{t\text{-}2} = y_t - 2y_{t\text{-}1} + y_{t\text{-}2}$$

або

$$\Delta y_t = (1 - B)\ y_t.$$

Протилежним по дії на процес щодо оператора різниці $\Delta$ є інтегруючий оператор $\Sigma$, який перетворює різницевий процес у процес першого порядку $W_t$ де: $y_t = \Sigma W_t$.

У випадку $d > 1$ відповідну кількість разів повторюється інтегруючий оператор ($\Sigma^d$). На даному етапі цілком можливо визначити ARIMA модель, яка є інтегрованою авторегресійною моделлю ковзного середнього.

Для позначення ARIMA використовується три параметри ($p, d, q$). Параметри $p$ і q, описані вище, а $d$ означає порядок оператора різниці.

Використовуючи оператор лагу $B$ можна представити процес ARIMA ($p, d, q$) у вигляді:

$$\Phi(B)\Delta^d y_t = \delta + \theta(B)\varepsilon(t), \tag{23}$$

де $\Phi(B)$ – авторегресійний оператор;

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1(B) - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p,$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1(B) - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q,$$

де $\theta(B)$ – оператор ковзного середнього.

Тому середнє $W_t$ можна обчислити за допомогою наступного співвідношення:

$$\mu_w = \delta\ /\ (1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \ldots - \Phi_p).$$

Якщо $\delta \neq 0$ і $d = 1$, то в інтегральній серії $yt$ існує детермінований лінійний тренд (при $\delta > 0$ – лінійне зростання).

Проблема, яка постає на першому етапі дослідження перед використанням моделі ARIMA, – знайти порядок однорідності процесу $d$, при якому автокореляційна функція прямує до 0 при значних $k$. Відомо, що автокореляційна функція ковзного середнього ($q$ – порядку) дорівнює 0 при $k > q$, а також, автокореляційна функція авторегресійного процесу порядку р прямує до 0 (при $k > p$) як член спадної геометричної прогресії.

Якщо параметри *p, q* відомі з розгляду автокореляційної функції, наступний крок – знаходження оцінки автокореляційних параметрів $(\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, ..., \widehat{\Phi}_p)$ та параметрів ковзного середнього $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, ..., \widehat{\theta}_q)$, які мінімізують величину похибки, пов'язану з цими параметрами:

$$\varepsilon(t) = \widehat{\theta}^{-1}(B)\widehat{\Phi}(B)W_t \,. \tag{24}$$

За міру оцінки похибки, зокрема, береться сума квадратів за всіма спостереженнями:

$$\sigma^2(\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, \ldots, \widehat{\Phi}_p, \widehat{\theta}_1, \theta_2, \ldots, \theta_q) = \sum \varepsilon^2(t)\,. \tag{25}$$

Загальний метод МНК (метод найменших квадратів) можна використати тільки у випадку чисто авторегресійного процесу ($p > 0$, $q = 0$).

У цьому випадку розв'язується система рівнянь Юла-Уокера для знаходження невідомих оцінок $\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, ..., \widehat{\Phi}_p$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \Phi_1 + \Phi_2\rho_1 + \ldots + \Phi_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \Phi_1\rho_1 + \Phi_2\rho_2 + \ldots + \Phi_p\rho_{p-2} \\ \rho_p &= \Phi_2\rho_{p-1} + \Phi_2\rho_{p-2} + \ldots + \Phi_p\,, \end{aligned} \tag{26}$$

де ρn – значення автокореляційної функції з лагом *n*, ($n = 1, 2, \ldots,\rho$).

Якщо параметр $q \neq 0$, то оцінки параметрів $\Phi$ і $\theta$ можна одержати за допомогою ітераційних методів моделювання, або методу максимальної правдоподібності.

За умови, що досліджуваний процес включає значні сезонні коливання, то як показують дослідження поруч з моделлю ARIMA, також доцільно використовувати модель ARIMAS, характерною ознакою якої є те, що описані процедури застосовуються зі зсувом у нашому випадку на 12 кроків (місяців) [3], тобто для прогнозування надходжень у січні потрібно знати подібні спостереження за січень попереднього року.

Що стосується Використання моделі ARIMA для прогнозування обсягів податкових надходжень [6].

Нехай для базисного інтервалу тривалістю *T* спостережень, що відображають розвиток процесів у підсистемі оподаткування, підібрана адекватна модель ARIMA (*p, d, q*), яка в подальшому повинна використовуватися з метою прогнозування на l кроків наперед ($l \geq 1$). У подальшому позначимо цей прогноз як $\widehat{y}_T(l)$, тобто прогноз на основі даних базисного інтервалу *T* на *l* кроків наперед. Оптимальним прогнозом назвемо прогноз з мінімальною середньоквадратичною похибкою. Оскільки прогнозна похибка є випадковою величиною, то мінімізуємо її сподівану величину:

$$E\,(e^2(t)) = E\,((y_{T+1} - \widehat{y}_T(l))^2\,).$$

Тоді прогнозне значення $\widehat{y}_T(l)$ дорівнює умовному математичному сподіванню, а саме:

$$\widehat{y}_T(l) = E\,(y_{T+1}\,/\,y_T,\,y_{T+1},\ldots,y_1). \tag{27}$$

Для доказу того, що вираз (27) буде прогнозом з мінімальною середньоквадратичною похибкою, повернемося до моделі ARIMA (*p, d, q*), яку представимо у вигляді:

$$\Phi(B)(1-B)^d\,y_t = \theta(B)\varepsilon(t)\,. \tag{28}$$

Тоді вираз для знаходження $y_t$ можна знайти у вигляді:

$$y_t = \Phi^{-1}(B)(1\text{-}B)^{-d}\theta(\mathrm{B})\varepsilon_t = \psi(\mathrm{B})\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t\text{-}j}.$$

У цьому випадку потрібно представити модель ARIMA як модель ковзного середнього нескінченного порядку ($q \to \infty$).

Тоді значення *y* при *t* = *T* + *l* прийме вигляд:

$$y_{T+1} = \psi_0\varepsilon_{T+l} + \psi_l\varepsilon_{T+l-1} + \ldots + \psi_l\varepsilon_{T-1} + \ldots =$$

$$= \psi_0\varepsilon_{T+l} + \psi_1\varepsilon_{T+l-1} + \ldots + \psi_{l-1}\varepsilon_{T+1} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{le+j}\varepsilon_{T-j}\,. \tag{29}$$

Цілком зрозуміло, що для прогнозу $\widehat{y}_T(l)$ можна використати тільки базисну інформацію на проміжку *T,* оскільки на цьому інтервалі відомі оцінки похибок $\widehat{\varepsilon}_T;\widehat{\varepsilon}_{T-1},\ldots,\widehat{\varepsilon}_1$.

Тому його можна обчислити за формулою:

$$\widehat{y}_T(l) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{l+j}^{k}\varepsilon_{T-j}\,, \tag{30}$$

де $\Psi^*_{1+j}$ – вибрані раціонально з метою мінімізації похибки прогнозування.

Використовуючи формули (29) та (30), знайдемо вираз для похибки прогнозування:

$$l_T(l) = y_{T+l} - y_T(l) = \psi_0\varepsilon_{T+l} + \psi_1\varepsilon_{T+l-1} + \ldots + \psi_{l-1}\varepsilon_{T+1} + \sum\left(\psi_{t+j} - \psi^*_{t+j}\right)\varepsilon_{T-j}\,.$$

Знайдемо також середньоквадратичну похибку прогнозування $E(l_T^2(l))$, використовуючи представлення $E(\varepsilon_\mu \varepsilon_j) = 0$, де $i \neq j$ у вигляді:

$$E(e_T^2(l)) = (\psi_0^1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*\right)\sigma_\varepsilon^2 . \qquad (31)$$

Зрозуміло, що мінімальна похибка прогнозування досягається за умови $\psi_{l+j}^* = \psi_{l+j}$, тобто оптимальні значення $\Psi^*$ наближаються до істинних. Сподівані значення $\varepsilon_T, \varepsilon_{T-l}, \ldots, \varepsilon_l$ є похибками, отриманими з моделі, яка оцінюється на базисному інтервалі *T*.

Перейдем до розрахунків прогнозних значень. З використанням моделі ARIMA (*p, d, q*) розглянемо розрахунки прогнозних значень на *l* кроків вперед:

$$W_t = \Phi_1 W_{t-1} + \Phi_2 W_{t-2} + \ldots + \Phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \delta , \qquad (32)$$

$$y_t = \sum W_t^d .$$

Спочатку знайдемо прогнозне значення при $l = 1(\widehat{W}_T(1))$:

$$W_{T+1} = \Phi_1 W_T + \Phi_2 W_{T-1} + \ldots + \Phi_p W_{T-p+1} + \varepsilon_{T+1} - \theta_1 \varepsilon_T - \theta_2 \varepsilon_{T-1} - \theta_q \varepsilon_{T-q+1} + \delta . \quad (33)$$

Прогнозне значення $\widehat{W}_t(1)$ – це умовно сподівана величина $W_{T+1}$.

Використовуючи (33), отримаємо:

$$\widehat{W}_t(1) = E(W_{T+1} / W_T, \ldots, W_1) = \Phi W_T + \ldots + \Phi_p W_{T-p+1} - \theta_1 \widehat{\varepsilon}_T - \ldots - \theta_q \widehat{\varepsilon}_{T-q+1} + \delta, \quad (34)$$

де $\widehat{\varepsilon}_T, \widehat{\varepsilon}_{T-1}, \ldots, \widehat{\varepsilon}_1$ – оцінки похибок, отримані з рівняння (32).

Прогнозне значення на один крок $\widehat{W}_T(1)$ використовується для отримання прогнозного значення на два кроки:

$$\widehat{W}_t(2) = E(W_{T+2} / W_T, \ldots, W_1) = \Phi_1 \widehat{W}_T(1) + \Phi_2 W_T + \ldots + \Phi_p W_{T-p+2} - \theta_2 \varepsilon_T - \ldots - \theta_q \widehat{\varepsilon}_{T-q+2} + \sigma.$$

Прогнозне значення на *l* кроків наперед:

$$\widehat{W}_t(l) = \Phi_1 \widehat{W}_T\left(l-1\right) + \ldots + \Phi_l W_T + \ldots + \Phi_p W_{T-p+1} - \theta_l \widehat{\varepsilon}_T - \ldots - \theta_q \widehat{\varepsilon}_{T-q+e} + \sigma . \quad (35)$$

Коли зроблено прогноз для різницевої серії, то у випадку d = 1, прогноз для yt має вигляд:

$$\widehat{y}_T(l) = y_T + \widehat{W}_T(1) + \widehat{W}_T(2) + \ldots + \widehat{W}_T(l) . \qquad (36)$$

У випадку, коли d = 2, прогноз для yt має вигляд:

$$\widehat{y}_T(l) = y_T + l(y_T - y_{T-1}) + l\widehat{W}_T(1) + (l-1)\widehat{W}_T(2) + \ldots + \widehat{W}_T(l) . \qquad (37)$$

Що стосуєтья питання – похибка прогнозу та довірчі інтервали. Як було показано раніше дисперсія похибки прогнозу для моделі ARIMA задається виразом:

$$E\left[e_T^2(l)\right] = (\psi_0^2 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2\,, \tag{38}$$

де $\psi_0, \psi_1, \psi_{l-1}$ – коефіцієнти представлення моделі ARIMA моделлю MA (модель ковзного середнього),

$\sigma^2$ – похибка прогнозу на базисному інтервалі.

За визначенням $\psi(B)$ відомо, що $\psi_0 = 1$, тоді дисперсія прогнозу на один крок вперед дорівнює $\sigma_\varepsilon^2$. Для визначення дисперсії прогнозу необхідно мати значення параметрів $\Phi_1$, $\Phi_2$,…,$\Phi_P$ та $\theta_1$, $\theta_2$,…$\theta_q$, однак відомі тільки оцінки параметрів $\Phi$ та $\theta$, які також містять похибку. Відповідно, справжня дисперсія прогнозу буде більша, ніж вираз (38). Для оцінки довірчих інтервалів потрібна оцінка похибки $\sigma_\varepsilon^2$, яка ґрунтується на сумі квадратів похибок, отриманих на базисному інтервалі $T$ з урахуванням кількості ступенів свободи $v = T - p - q$:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{\mu=1}^{T} \hat{\varepsilon}_\mu^2}{T - \mathrm{p} - q}\,. \tag{39}$$

Використовуючи те, що $\psi_0 = 1$, довірчі інтервали для п стандартних відхилень при прогнозуванні на $l$ кроків, розраховуються:

$$y_{T+l} = \hat{y}_T^{(l)} \pm n(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2)^{1/2} \hat{\sigma}_\varepsilon\,. \tag{40}$$

З існуванням довірчого інтервалу, для істинного значення прогнозного показника, тісно пов'язана концепція податкового ризику. Оскільки, прогнозоване значення величини податкових надходжень відповідає середині довірчого інтервалу для істинного значення даного показника, а похибка прогнозу згідно з прийнятою аксіоматикою є нормально розподіленим «білим шумом», то існує 50-відсоткова ймовірність того, що істинне значення податкових надходжень виявиться меншим ніж прогнозоване.

Тому, якщо в якості планового показника затвердити величину прогнозного значення, то в більшості випадків доходна стаття бюджету виявиться недовиконаною. Однак, як показано в першому і другому розділі, відсоток недовиконання планових показників податкових надходжень в Україні суттєво вищий. Зазначимо, що способів подолання такої ситуації декілька. Один із них – використання в якості планового показника нижньої границі довірчого інтервалу для істинного значення.

У цьому випадку легко розрахувати ступінь ризику планованого показника. Наприклад, якщо для 66% довірчого інтервалу ступінь ризику (ймовірність недовиконання) дорівнює $\alpha_1$ = 1- 0,66 / 2 = 0,17, то для 95% довірчого інтервалу $\alpha_2$ = 1- 0,95 / 2 = 0,025.

На нашу думку слід використовувати інший алгоритм розрахунку планових показників для зниження ризику, який би, по-перше, був пов'язаний з деяким зменшенням планового показника в порівнянні з прогнозованим, по-друге, з розкладанням процесу на компоненти, прогнозування яких здійснюється окремо, а одержані похибки при розрахунках сумарної характеристики взаємно компенсуються.

І як висовок. Отже, для одержання більш достовірних оцінок необхідно здійснити розбудову альтернативних методів прогнозування, які б ґрунтувалися на внутрішній структурі процесу. Обґрунтованим є також вибір базисного часового інтервалу, що використовується для аналізу і прогнозування.

З метою використання економіко-математичних моделей, для удосконалення системи податкових надходжень та прогнозування їх динаміки розвитку, проведений аналіз сучасних моделей та методів з точки зору їх адекватності досліджуємих процесів. Оскільки нестаціонарність є притаманною рисою більшості економічних процесів, то суттєвим є приведення процесу до стаціонарного виду, а також поділ процесу на трендову і випадкову складові. При цьому приймається гіпотеза, що нестаціонарність зосереджена в трендовій складовій. При прогнозуванні будь-якого процесу, у якості першої спроби, використовується метод лінійного тренду.

Наступним за доступністю і простотою, зокрема, можна вважати метод простого ковзного середнього. Він, по суті, використовує гіпотезу сталої тенденції розвитку, при цьому, якщо для методу лінійного тренду тенденція виявляється на усьому базисному інтервалі, то для простого ковзного середнього – за останніми доступними спостереженнями.

Розглянуті методи зваженого згладжування: простого експоненційного, подвійного експоненційного, експоненційного Холта-Вінтера, що дозволяють дослідити лінійні тренди. Характерною рисою цих методів є те, що вони нехтують складною структурою процесу, виокремлюючи, по суті, основну тенденцію. При цьому вибір величин параметрів згладжування дозволяє варіювати кількість спостережень, що впливають на остаточний результат.

Аналіз показав, що при прогнозуванні з використанням методу випадкового «блукання» передбачене значення економічного показника є або постійним, або лінійною функцією часу. Тому не завжди можна використовувати цей метод при прогнозуванні реальних процесів, що відображаються вигляді моделей. Це пов'язано з тим що більшість процесів, що відбуваються у системі оподаткування мають коливальний характер.

До моделей та методів прогнозування, що враховують складний коливальний характер процесу, належать моделі ARIMA, ARIMAS, ARCH, GARCH. Характерною рисою останніх двох є врахування гетероскедастичності.

Головною особливістю всіх цих моделей є їх авторегресійний характер. Класичний метод вибору моделі ARIMA*ARIMAS (ці моделі використовуються спільно, як композиційно-складна математична модель з гетерогенною структурою) – побудова автокореляційної функції, з урахуванням її вигляду, шляхом застосування різницевого оператора, приведення процесу до стаціонарності, ідентифікація процесу ARIMA(S) за виглядом автокорреляційної функції перетвореного процесу.

На відміну від вищевикладених методів згладжування ваги попередніх значень не задаються, а розраховуються, використовуються також попередні помилки, ваги при котрих також розраховуються методами, які мінімізують похибку на базисному інтервалі. Тому модель ARIMA не задається, а адаптується з метою реального опису досліджуваного процесу на базисному інтервалі спостереження. Використання різницевого оператора дозволяє врахувати лінійний або квадратичний тренд.

Крім того, разом із моделлю ARIMA, доцільно використовувати модель ARIMAS, особливістю якої є використання попередніх спостережень і їхніх помилок із зсувом, кратним 12 (при використанні щомісячних спостережень). Це означає, що, за наявності сезонності в часовому русі характеристики, треба для прогнозу, наприклад за січень, використовувати дані минулого, а, можливо, і позаминулого місяця січня. Крім того, можна ввести лінійний або квадратичний тренд між спостереженнями зі зсувом у один рік.

Аналіз перерахованих властивостей свідчить про широкі можливості моделі ARIMA*ARIMAS при імітації складних економічних процесів прогнозування та стосовно податкових надходжень зокрема.

Похибки при розрахунках планових показників податкових надходжень можливо зменшити шляхом введення характеристики податкового ризику. При цьому, планові показники повинні встановлюватись на основі об'єктивної цифрової інформації відносно характеру процесу збору податків за попередній часовий інтервал.

При розрахунках за моделлю ARIMA похибки на базисному інтервалі, величини довірчих інтервалів для істинних значень можуть бути використані у розрахунках одного з показників векторної оцінки ступеня податкового ризику. Зниження (зменшення) цієї характеристики ризику (однієї зі складових ризику), дозволяє обрати адекватну модель яка відображає досліджуємі реальні процеси.

**Список використанних джерел:**

1. Лук'яненко І., Красникова Л. Економетрика: практикум з використанням комп'ютера. Київ : Т-во «Знання», КОО, 1998. 220 с.

2. Лук'яненко І., Красникова Л. Економетрика : підручник. Київ : Т-во «Знання», КОО, 1998. 494 с.

3. Терещенко Л.О. Моделювання та прогнозування податкових надходжень на регіональному рівні : дисертація кандидата економічних наук. Київ, 2000. 200 с.

4. Українсько-Європейський консультативний центр з питань законодавства. Тенденції української економіки. 2000. UEPAG, 2000. 85 с.

5. Ashley R. On the Usefulnes of Macroeconmic Forecasts as Inputs to Forecasting Models. *Journal of Forecasting.* 1983. No. 2. P. 211–223.

6. Pindyc*k* R., Rubinfeld D. E*k*onometri*k* models and e*k*onomi*k* forecasts. USA : Mc. Grow-Hill, Inc., 1991. 596 p.