SECTION 2. APPLIED MECHANICS

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-475-7-5

BENDING OF THE RULED NONDEVELOPABLE SURFACES ON THE EXAMPLE OF SURFACES OF THE BINORMALS OF THE SLOPE LINES

ЗГИНАННЯ ЛІНІЙЧАТИХ НЕРОЗГОРТНИХ ПОВЕХОНЬ НА ПРИКЛАДІ БІНОРМАЛЕЙ УКОСУ

Kresan T. A.
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor at the Department
of Natural, Mathematical and General
Engineering Disciplines
Separated Subdivision National
University of Life and Environmental
Sciences of Ukraine «Nizhyn
Agrotechnical Institute»
Nizhyn, Chernihiv region, Ukraine

Кресан Т. А.
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри природничо-
математичних
та загальноінженерних дисциплін
Відокремлений підрозділ
Національного університету
біоресурсів і природокористування
України «Ніжинський агротехнічний
інститут»
м. Ніжин, Чернігівська область,
Україна

Pylypaka S. F.
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Graphic
Geometry, Computer Graphics
and Design
National University of Life
and Environmental Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine

Пилипака С. Ф.
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри нарисної
геометрії, комп'ютерної графіки
та дизайну
Національний університет
біоресурсів природокористування
України
м. Київ, Україна

Demchuk I. O
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor at the Department
of Natural, Mathematical and General
Engineering Disciplines
Separated Subdivision National
University of Life and Environmental
Sciences of Ukraine «Nizhyn
Agrotechnical Institute»
Nizhyn, Chernihiv region, Ukraine

Демчук І. О.
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри природничо-
математичних
та загальноінженерних дисциплін
Відокремлений підрозділ
Національного університету
біоресурсів і природокористування
України "Ніжинський агротехнічний
інститут"
м. Ніжин, Чернігівська область,
Україна

Вчення про згинання є важливим розділом диференціальної геометрії поверхонь. Найбільш вивченим в теоретичному плані є згинання розгортних поверхонь, тому що окремий випадок згинання таких поверхонь на площину, тобто одержання розгорток, носить прикладний характер. Загальновідомою є теорема про можливість згинання гвинтових поверхонь на поверхні обертання. Класичним прикладом служить згинання гвинтового коноїда в катеноїд. Гвинтові лінії поверхні при її згинанні поступово деформуються, їх крок зменшується, аж поки не перетворяться у паралелі поверхні обертання. Нерозгортні лінійчаті поверхні теж можна згинати подібно до розгортних, тобто деформувати напрямну криву таким чином, щоб прямолінійні твірні залишалися прямолінійними.

Напрямну криву укосу для конструювання поверхні доцільно взяти у функції довжини дуги s, оскільки довжини ліній на поверхні не змінюються при її згинанні. Параметричні рівняння кривої укосу мають вигляд [1]:

$$x = \cos\beta \int \cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right) ds;$$
$$y = \cos\beta \int \sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right) ds;$$
$$z = s\sin\beta, \qquad (1)$$

де k=k(s) – залежність кривини k кривої від довжини її дуги s; β – кут підйому лінії укосу – стала величина. Всі дотичні до кривої (1) нахилені під кутом β до горизонтальної площини.

Щоб провести через криву (1) поверхню бінормалей, потрібно мати вирази напрямних косинусів вектора бінормалі. Вони визначаються через перші і другі похідні кривої (1).

Запишемо параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка проходить через криву (1) і прямолінійні твірні якої паралельні одиничному вектору :

$$X = \cos\beta \int \cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right) ds - u\sin\beta\cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right);$$
$$Y = \cos\beta \int \sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right) ds - u\sin\beta\sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k\,ds\right);$$
$$Z = s\sin\beta + u\cos\beta, \qquad (2)$$

де u – друга незалежна змінна поверхні, відлік якої починається від точки на напрямній кривій.

Рівняння (2) є параметричними рівняннями поверхні бінормалей лінії укосу (1). Відомо, що при згинанні поверхні коефіцієнти першої квадратичної форми E, F, G залишаються незмінними. Для їх знаходження нам потрібні частинні похідні рівнянь поверхні (2).

Знаходимо коефіцієнти *E, F, G*:

$$E=\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2=1;$$

$$F=\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial s}+\frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial s}+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial s}=0;$$

$$G=\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2=1+u^2k^2\mathrm{tg}^2\beta. \qquad (3)$$

Коефіцієнти E і F є сталими. Проаналізуємо вираз коефіцієнта G. До нього входить добуток k·tgβ. Відомо, що між кривиною і скрутом лінії укосу існує лінійна залежність, в якій коефіцієнтом пропорціональності служить tgβ. Добуток k·tgβ = σ, де σ – скрут кривої. Напрямну криву (1) можна деформувати зміною її кривини, зберігаючи при цьому незмінною залежність σ = σ(s). Виходячи із цього, можемо записати: σ = σb, або k·tgβ = kb·tgβb, де індексом “b” позначено параметри кривої після її деформації. Будемо керувати формою кривої величиною її кута підйому. Для зміни кута підйому введемо сталу p. Після деформації кривої її кут підйому набуде значення βb = p·β. Із рівності скруту напрямної кривої до і після згинання запишемо: k·tgβ = kb·tg pβ. Звідси визначаємо залежність кривини напрямної кривої після зміни її кута підйому:

$$k_b=\frac{k\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\,p\beta}=k\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{ctg}\,p\beta \quad . \qquad (4)$$

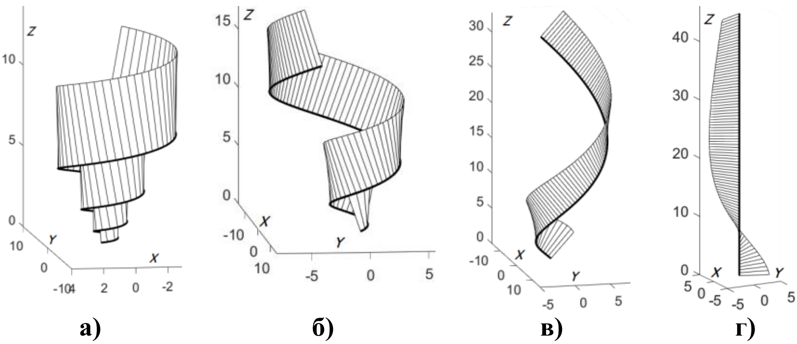

Рис. 1. Проміжні положення поверхні бінормалей лінії укосу () при її згинанні: a) p=0,5; b) p=1; c) p=2; d) p=4,5

Підставимо в рівняння кривої укосу (1) нові значення кута βb=p·β і кривини kb·із (4):

$$x_b = \cos p\beta \int \cos\left(\frac{tg\beta}{\sin p\beta} \int k\, ds \right) ds;$$

$$y_b = \cos p\beta \int \sin\left(\frac{tg\beta}{\sin p\beta} \int k\, ds \right) ds;$$

$$z_b = s \sin p\beta, \qquad (5)$$

Крива укосу (5) має однакову закономірність зміни скруту σ = σ(s) незалежно від значення параметра p. При p = 1 параметричні рівняння (5) кривої перетворюються в рівняння (1).

Згинання лінійчатих нерозгортних поверхонь можна здійснювати подібно до розгортних, тобто із збереженням прямолінійних твірних. Частковим випадком такого згинання є згинання поверхні бінормалей напрямної просторової кривої. При згинанні поверхні напрямна крива деформується таким чином, що її скрут у функції довжини дуги залишається незмінним.

Література:

1. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки. *Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва»*. 2001. Т. 10. С. 74–78.
2. Пилипака С. Ф. Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. Вип. 63. С. 80–83.

Pylypaka S., Kresan T., Trokhaniak O., Taras, I., Demchuk I. Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent. *Journal for Geometry and Graphics*. 2021. Volume 25. No. 2. Pp. 163–170. URL: https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf