SECTION 13. GENERAL ISSUES OF ENGINEERING SCIENCES

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-475-7-19

ON STABILITY AT THE FIRST APPROACH SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF TELEGRAPH EQUATIONS

ПРО СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ

Dejneka O. Yu.
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor at the Department of higher mathematics
National University of Water and Environmental Engineering
Rivne, Ukraine

Дейнека О. Ю.
кандидат технічних наук,
доцент кафедри вищої математики
Національний університет водного господарства та природокористування
м. Рівне, Україна

Низка задач в техніці викликає необхідність дослідження стійкості розв'язків мішаної задачі для системи телеграфних рівнянь з нелінійними крайовими умовами.

Вивчається питання про стійкість за першим наближенням тривіального розв'язку згаданої вище задачі шляхом зведення до нелінійної системи диференціально-різницевого рівняння із початковою умовою.

1. Постановка задачі. Нехай $C^0(\mathrm{M},\mathbb{R})$ та $C^1(\mathrm{M},\mathbb{R})$ – простори відповідно неперервних та неперервно диференційованих на множині M функцій зі значеннями в R і нормами $\|z\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in M}|z(t)|_{\mathbb{R}}$ $\|z\|_{C^1} = \|z\|_{C^0} + \sup\limits_{t\in M}\left|\dfrac{dz(t)}{dt}\right|_{\mathbb{R}}$, відповідно.

Розглядається система телеграфних рівнянь [1]

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \\ a\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \qquad x\in[0,\,l],\ \ t\geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

з нелінійними крайовими

$$\begin{cases} cu(0,t)+d\,v(0,t)=f\left(u(0,t),v(0,t),t\right), \\ \dfrac{d}{d\,t}u(l,t)+hu(l,t)+qv(l,t)=g\left(u(l,t),v(l,t),t\right), \qquad t\in\mathbb{R}^{+}, \end{cases} \tag{2}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=\alpha(x), \\ v(x,0)=\beta(x), \qquad x\in[0,\,l], \end{cases} \tag{3}$$

де l – фіксоване додатне число; $a > 0$, c, d, h, q – сталі коефіцієнти; α,β – елементи простору $C^{1}\left([0,\,l\,],\mathbb{R}\right)$.

Стійкість нульового розв’язку вище вказаної задачі вивчається, коли стійким є нульовий розв’язок задачі (1), (3) із однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} cu(0,t)+d\,v(0,t)=0, \\ \dfrac{d}{d\,t}u(l,t)+hu(l,t)+qv(l,t)=0, \qquad t\in\mathbb{R}^{+}. \end{cases} \tag{4}$$

Функції $g(u,v,t)$ та $f(u,v,t)$ задовольняють умови:

а) $g(0,0,t)=f(0,0,t)=0,\ t\geq 0$;

б) $f(u,v,t)$ – неперервно диференційована, а $g(u,v,t)$ – неперервна для всіх $t\geq 0$;

в) $|f(u,v,t)|\leq L(|u|+|v|),\ \ |g(u,v,t)|\leq L(|u|+|v|)$ для досить малих u,v і всіх $t\geq 0$.

Розв’язком задачі (1)–(3) вважаються функції $u(x,t),v(x,t)$, які належать простору $C^{1,1}\left([0,\,l]\times[0,+\infty),\mathbb{R}\right)$. Тому, повинні виконуватися умови узгодження крайових і початкових умов. Узгодження умов (2) та (3) випливає із врахування неперервної диференційованості функцій $u(x,t),\ v(x,t)$, як розв’язку (1), в точках $(0,0)$ та $(l,0)$ і мають вигляд

$$c\alpha(0)+d\beta(0)=f\left(\alpha(0),\beta(0),0\right),\ -\frac{\beta(l)}{a}+h\alpha(l)+q\beta(l)=g\left(\alpha(l),\beta(l),0\right), \tag{5}$$

$$c\beta'(0)+D\alpha'(0)=f_u'\left(\alpha(0),\beta(0),0\right)\beta'(0)+f_v'\left(\alpha(0),\beta(0),0\right)\alpha'(0)-a\,f_t'\left(\alpha(0),\beta(0),0\right).$$

Для крайової умови (4) у системі (5) слід вважати, що $f(u(0,t),v(0,t),t)\equiv 0$, $g(u(l,t),v(l,t),t)\equiv 0$.

Щоб звести мішану задачу (1) – (3) до диференціально-різницевого рівняння припустимо, що для чисел $c,\ d$ і функції $f(u,v,t)$ додатково виконуються умови

$$c\neq -d \tag{6}$$

$$c+d-f'_u(0,0,t)-f'_v(0,0,t)\neq 0, \text{ для всіх } t\geq 0. \tag{7}$$

Розв'язок $(\tilde{u},\tilde{v})$ задачі (1), (2) називається локально експоненціально стійким [2], якщо існують такі числа $M\in[1,+\infty)$ і $p\in(0,+\infty)$, що для деякого числа $r>0$ і будь-якого розв'язку (u,v) цього рівняння, для якого

$$\max_{x\in[0,l]}\left\|(u(x,0),v(x,0))-(\tilde{u}(x,0),\tilde{v}(x,0))\right\|_{\mathbb{R}^2}<r,$$

справджується співвідношення

$$\max_{x\in[0,l]}\left\|(u(x,t),v(x,t))-(\tilde{u}(x,t),\tilde{v}(x,t))\right\|_{\mathbb{R}^2}\leq$$

$$\leq M\exp\{-pt\}\max_{x\in[0,l]}\left\|(u(x,0),v(x,0))-(\tilde{u}(x,0),\tilde{v}(x,0))\right\|_{\mathbb{R}^2}, \text{ для всіх } t\in[0,+\infty).$$

З'ясуємо за яких умов, розв'язки задачі (1), (2) є стійкими за першим наближенням.

2. Основний результат. Сформулюємо твердження про стійкість за першим наближенням.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови а)–в), умови узгодження (5), співвідношення (6) та (7), а також умови:*

$$0<|(c+d)^{-1}(d-c)|<1;\ h>q;\ h-q+(c+d)^{-1}(d-c)(h+q)\neq 0;$$

$$|h-q|\geq|(c+d)^{-1}(d-c)(h+q)|,$$

тоді існує число $L_0>0$*, таке що для всіх* $L\in[0,\ L_0]$ *нульовий розв'язок задачі (1), (2) є локально* експоненціально стійким.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови а)–в), умови узгодження (5), співвідношення (6) та (7), а також умови:*

$$0<|(c+d)^{-1}(d-c)e^{2al(h-q)}|<1;$$

$$2q(c+d)^{-1}(d-c)>0;$$

$$\sqrt{1-(c+d)^{-2}(d-c)^2e^{4al(h-q)}}\arccos\left((c+d)^{-1}(c-d)e^{2al(h-q)}\right)>$$

$$>4alqe^{2al(h-q)}(c+d)^{-1}(d-c),$$

тоді існує число $L_0 > 0$*, таке що для всіх* $L \in [0, L_0]$ *нульовий розв'язок задачі (1), (2) є локально* експоненціально стійким.

3. Приклад. Розглянемо коло, що складається з відрізка довгої лінії та тунельного діода. Якщо в лінії немає втрат напруги, то напруга υ та струм *i* пов'язані наступними рівняннями:

$$L_s \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}, \; C_s \frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}, \tag{8}$$

де $0 < x < 1$, а L_s та C_s – відповідно питомі індуктивність та ємність лінії. Граничні умови на одному кінці мають наступний вигляд:

$$E = \upsilon(0,t) + Ri(0,t), \tag{9}$$

$$i(1,t) = C\frac{d\upsilon(1,t)}{dt} + f[\upsilon(1,t)], \tag{10}$$

де $f(\upsilon)$ – нелінійна характеристика тунельного діода.

Крім цього задано початкові умови

$$\begin{cases} \upsilon(x,0) = \gamma(x), \\ i(x,0) = \beta(x), \qquad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{11}$$

Будемо вважати, що

$$f(\upsilon_0 + \Delta\upsilon) = f(\upsilon_0) - a\Delta\upsilon - p(\Delta\upsilon)^2 \; (a, p > 0).$$

$$\upsilon(x,t) = \upsilon_0 + \Delta\upsilon(x,t), \qquad i(x,t) = i_0 + \Delta i(x,t),$$

тоді отримаємо наступну крайову задачу

$$L_s \frac{\partial \Delta i(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta\upsilon(x,t)}{\partial x}, \; C_s \frac{\partial \Delta\upsilon(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta i(x,t)}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\Delta\upsilon(0,t) + R\Delta i(0,t) = 0, \tag{13}$$

$$\Delta i(1,t) + a\Delta\upsilon(1,t) + p(\Delta\upsilon(1,t))^2 = C\frac{d\upsilon(1,t)}{dt}. \tag{14}$$

Загальний розв'язок (12) має наступний вигляд:

$$\Delta\upsilon(x,t) = \varphi\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \theta\left(t + \frac{x}{\omega}\right), \tag{15}$$

$$\Delta i(x,t) = \frac{1}{Z}\left[\varphi\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - \theta\left(t + \frac{x}{\omega}\right)\right], \tag{16}$$

де $\varphi(t)$ та $\theta(t)$ достатньо гладкі функції, а $Z = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}.$

З першої граничної умови (9) маємо, що

$$\varphi(t) = \frac{R-Z}{R+Z}\theta(t). \tag{17}$$

Із формул (15) – (17) випливають рівності

$$\Delta\upsilon\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{R-Z}{R+Z}\theta\left(t-\frac{2}{\omega}\right) + \theta(t), \tag{18}$$

$$\Delta i\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{Z}\left[\frac{R-Z}{R+Z}\theta\left(t-\frac{2}{\omega}\right) - \theta(t)\right]. \tag{19}$$

Після заміни в другій граничній умові (10) t на $t-\dfrac{1}{\omega}$, отримуємо рівність

$$\Delta i\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right) + a\Delta\upsilon\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right) + p\left[\Delta\upsilon\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 = C\frac{d\upsilon\left(1,\, t-\frac{1}{\omega}\right)}{dt}. \tag{20}$$

Покладемо $x(t) = \dfrac{1}{pZ}\theta(CZt), \quad h = \dfrac{2}{CZ\omega}, \quad K = \dfrac{Z-R}{Z+R}.$

З рівностей (18) – (20) остаточно маємо, що

$$\dot{x}(t) - K\dot{x}(t-h) + (1-\alpha)x(t) + K(1+\alpha)x(t-h) = [x(t) - Kx(t-h)]^2, \tag{21}$$

тут $\alpha = Za$.

Тоді, згідно теореми 1, якщо $0 < |K| < 1,\ \alpha < 1,$ $1-\alpha+K(1+\alpha) > 0$, $|K(1+\alpha)| \le |(1-\alpha)|.$

$$K = \left(\sqrt{\frac{L_s}{C_s}} - \frac{1}{\sqrt{L_sC_s}}\right) : \left(\sqrt{\frac{L_s}{C_s}} + \frac{1}{\sqrt{L_sC_s}}\right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}a,$$

нульовий розв'язок задачі (12) – (14) є локально експоненціально стійким.

Література:

1. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними : навчальний посібник. Київ : Вища Школа, 1995. 350 с.

2. Слюсарчук В. Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі : навчальний посібник. Рівне : УДУВГ, 2003. 366 с.