INNOVATIVE TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS EDUCATION

ІННОВАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

Sergii Semenets[1]
Larysa Semenets[2]

DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-473-3-29

Abstract. The introduction of the competence model of Mathematics education involves the actualization of personal and activity factors of development of subjects of the educational process, development and scientific justification of innovative teaching technologies. The subject of the study is innovative technologies of personality development in Mathematics education. **The purpose of the study** is to create, scientifically and theoretically substantiate as well as experimentally verify the innovative technologies of personality development in Mathematics education. **Research methodology.** To achieve the goal, the following research methods were used: survey, content-theoretical and structure-system analysis, abstraction and modeling, ranking, pedagogical experiment, statistical method as well as content generalization. **Results obtained.** In the presented work, the central idea pertains to the stance on the dual nature of mathematical competence. In the work at hand, on the dualistic nature of mathematical proficiency, in which its dual characteristics have external and internal manifestations. The external manifestations of mathematical competence include the socially recognized parameters and their attributes that enable society to assess individual's proficiency in the realm of Mathematics. Instead, its internal manifestations are delineated by individual and psychological dimensions and personality characteristics, owing to which mathematical competence is an integral self-development system. Essential is the

[1] Doctor of Pedagogical Sciences,
Professor of the Department of Computer Engineering and Cyber Security,
Zhytomyr Polytechnic State University, Ukraine
[2] Candidate of Pedagogical Sciences,
Associate Professor of the Department of Software Engineering,
Zhytomyr Polytechnic State University, Ukraine

emphasis on mathematical proficiency as an inherent quality prevailing in the personal and psychological dimension of mathematical competence's internal manifestation. Taking into consideration the spatial Cartesian realization, the role and place of mathematical abilities in the three-dimensional structure of the mathematical competence's internal manifestation are substantiated, a content and systematic analysis of the studied phenomenon's structural components is made. The existence of complex correlational relationships of four structural components of mathematical abilities (system-generating, coding-formalized, cognitive-generalizing, mnemonic-generalizing) with three dimensions of mathematical competence's external manifestation (content-theoretic, process-active, personal-psychological) is established. The scientific idea that the development of students' mathematical abilities is ensured by updating external dimensions of mathematical competence in educational and mathematical activities is introduced. Drawing upon the results of its implementation and introducing the principle of developmental continuity in education, a technology for the development of students' mathematical abilities was elaborated. The foundation of this technology lies in the pedagogical approach known as the task-based method for instructing students in mathematics, in which the methods of mathematical and educational modeling are embodied, the transition from the abstract to the concrete. In such a way, the reflection of the process and the results of educational and mathematical activity is ensured. The instruction regarding the facets of students' current mathematical progression is delineated by their content, classification criteria, typological attributes, and cycle of developmental learning. Considering the advanced pedagogy in place, a theoretical-probabilistic methodological framework for developmental mathematics education was constructed, the content of its stages was revealed. It was established that innovative teaching technology involves the following stages: definition of areas of actual mathematical development; creation of zones of immediate mathematical development; transformation of zones of immediate mathematical development into the zones of actual mathematical development; designing the zones of students' immediate mathematical development. The efficacy of the cutting-edge educational technology was evaluated based on the outcomes of the pedagogical trial. **Practical value.** In view of the problem raised in the work, the results of a pilot study on the manifestations of students' mathematical abilities, significant factors of their development were examined. Validation of the constructed models and advanced technologies during hands-on Mathematics instruction enables us to argue about their impact on development, as well as about achieving the developmental function of education. It was found that all structural components of students' mathematical abilities undergo positive changes. The obtained research results can be used by authors of mathematics programs and coursebooks, methodology teachers in the current system of Mathematics teachers professional training. The developed innovative technologies can be applied by teachers of higher education institutions, teachers-researchers, teachers-practitioners to realize the developmental function of teaching and self-development of pedagogical systems "teacher – learner", "teacher – student". The methodological developments presented in the paper will be useful in the system of further training of pedagogical staff in order to implement the concept of "New Ukrainian School". **Value / Originality.** Examination of the outcomes stemming from the integration of the newly created cutting-edge technologies, the results of the pedagogical experiment made it possible to conclude about the possibility of resolving the contradictions of modern mathematical education related to the logic of educational cognition, associative-reflexive theory of learning, traditionally established technology of teaching Mathematics, which presuppose the elimination of empirical generalizations and the actualization of empirical thinking, the leveling of mathematical abilities and the neglect of the dual nature of students' mathematical competence. The findings of the recent external independent evaluation, as well as the results of the national multi-subject testing serve as a manifestation of these discrepancies.

1. Вступ

Компетенізація математичної освіти, її переорієнтація із знаннєвої моделі на компетентнісну зумовлюють новітнє наукове переосмислення місця і ролі внутрішніх ресурсів особистості, її індивідуально-психологічних утворень, які забезпечують ефективність розвитку математичної компетентності, вможливлюють вимірність структури її внутрішнього прояву. Усталеною є практика, коли математична компетентність вимірюється на основі зовнішніх проявів – спроможності діяти, передусім, за результатами розв'язування прикладних задач із математики, правильно зробленої або ж обраної відповіді. Так чи інакше нівелюються якості особистості, особистісні виміри, які забезпечують успішну навчально-математичну діяльність, слугують розвитку математичної компетентності.

Дотепер бракує досліджень про особистісні якості й індивідуально-психологічні утворення, які відносяться до внутрішнього прояву такої компетентності. Насправді гостро затребуваними залишаються дослідження щодо структурних зв'язків математичної компетентності та математичних здібностей здобувачів освіти, досі в освітній практиці бракує методик і технологій їх розвитку.

У представленому дослідженні оновлення цілей і змісту математичної освіти тісно пов'язується з проблемою гармонійного розвитку особистості, всебічним розкриттям задатків, здібностей і обдарувань суб'єктів освітнього процесу. Направду компетенізація математичної освіти передбачає новітнє наукове переосмислення математичних здібностей як посутньої внутрішньої характеристики математичної компетентності, як іманентного атрибуту, що превалює в її особистісно-психологічному вимірі. Виокремлення математичних здібностей у структурі внутрішнього прояву математичної компетентності зумовлює перегляд як змістово-процесуальної, так і контрольно-оцінної складових технології навчання математики.

Окрім цього, існуючі в освітній практиці протиріччя зумовлені браком досліджень, у яких проблема розвитку математичної компетентності й математичних здібностей здобувачів освіти студіюється в розрізі вчення про зони найближчого математичного розвитку й теорії розвивального навчання. Проблемне поле складають питання змісту й типології зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти, розроблення й теоретичного обґрунтування технології розвивального навчання математики.

Насправді вирішення окресленого кола питань уможливлює розв'язання низки протиріч у чинній системі математичної освіти між:

– прийнятою концепцією «Нова українська школа» та браком методичного препарування, як-от нерозробленістю змістового, процесуального, контрольно-оцінного компонентів методичної системи компетентнісно орієнтованого навчання математики;

– розвиненою теорією компетентнісної математичної освіти та неготовністю вчителів і викладачів математики до її практичного впровадження;

– загальновизнаним задачним підходом до організації навчально-математичної діяльності здобувачів освіти та відсутністю науково обґрунтованої задачної системи компетентнісного навчання математики;

– збільшенням частки годин на самостійну роботу здобувачів освіти та їхньою фактичною неготовністю до самонавчання математики.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що вперше математичні здібності вивчаються в розрізі дуальної природи математичної компетентності (її зовнішніх і внутрішніх проявів), подальшого розвитку набуло вчення про зони найближчого математичного розвитку здобувачів освіти, побудовано інноваційну дидактичну модель математичної освіти, створено й науково обґрунтовано теоретико-ймовірнісну методичну модель розвивального навчання математики.

Мета дослідження полягає в створенні, науково-теоретичному обґрунтуванні та експериментальній перевірці інноваційних технологій розвитку особистості в компетентнісній математичній освіті.

Відповідно до мети визначено **науково-дослідницькі завдання:**

1) установити роль і місце математичних здібностей у дуальній природі математичної компетентності, зробити змістовий і системний аналіз структурних компонентів;

2) побудувати й теоретично обґрунтувати інноваційну дидактичну модель математичної освіти;

3) розвинути вчення про зони найближчого математичного розвитку здобувачів освіти;

4) створити та науково обґрунтувати теоретико-ймовірнісну методичну модель розвивального навчання математики;

5) експериментально перевірити ефективність інноваційних технологій у математичній освіті.

Для вирішення окреслених завдань застосовано такі **методи дослідження:**

– опитування (на етапі пілотного дослідження);

– змістово-теоретичний і структурно-системний аналіз (у розкритті змісту й структури математичної компетентності та математичних здібностей, у встановленні типологічних характеристик зон найближчого математичного розвитку, висвітленні циклу розвивального навчання математики й обґрунтуванні теоретичних засад інноваційних технологій навчання);

– абстрагування і моделювання (при побудові декартової реалізації дуальної природи математичної компетентності, розробленні теоретико-ймовірнісної методичної моделі розвивального навчання математики);

– ранжування (при встановленні показників у вимірах математичної компетентності, ієрархічному представленні зон найближчого математичного розвитку та встановленні етапності навчання математики);

– педагогічний експеримент і статистичні (у ході пілотного дослідження та експериментальної перевірки інноваційних технологій навчання);

– змістового узагальнення (у висвітленні результатів і формулюванні висновків).

2. Математична компетентність і математичні здібності: зміст, структурні зв'язки, технологія розвитку

Відносячи математичну компетентність як до предметних, так і ключових компетентностей, дослідники фокусують увагу на окремих індивідуально-психологічних характеристиках і якостях особистості:

– інтегративному утворенні особистості, що поєднує в собі математичні та загальнонавчальні знання, уміння, навички, досвід математичної та загальнонавчальної діяльності [1];

– сукупності особистісних якостей (ціннісно-смислових орієнтацій, математичних знань, умінь, навичок, здібностей), що дозволяють йому ефективно використовувати математичні знання і методи в майбутній професійній діяльності [2];

– інтегрованій характеристиці якості особистості як суб'єкта діяльності в галузі математики [3];

– інтегральній якості особистості, що полягає у здатності та готовності використовувати математику для здійснення операційних, гносеологічних та аналітичних функцій діяльності вчителя, пов'язаної з навчанням [4];

– особистісному утворенні, що характеризує здатність учня (учениці) застосовувати набутий досвід математичної діяльності під час розв'язування задач [5];

– якості особистості, яка поєднує в собі математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності [6];

– умінні бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, умінні будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [7].

На дуальній природі компетентності особистості (зверненість як назовні, так і всередину) наголошує знаний український науковець, методист-математик Н. А. Тарасенкова: «якщо виходити з усталеного означення компетентності як спроможності діяти на основі отриманих знань (зовнішній прояв), то поза увагою залишається потужний пласт внутрішніх, особистісних чинників, які прискорюють або гальмують процеси набуття компетентностей» [8, с. 17].

2.1. Пілотне дослідження проблеми

Пілотне дослідження передбачало з'ясування стану розв'язання окресленої проблеми в шкільному освітньому процесі. Було підготовлено анкети для вчителів математики, де пропонувалося дати відповідь на питання про:

1) зміст, ознаки, складові математичних здібностей;

2) особливості методики розвитку математичних здібностей;

3) особистісні якості вчителя та учнів, що забезпечують розвиток математичних здібностей;

4) наявність в учнів математичних здібностей;

5) роль у навчанні математики математичних здібностей і особистісних якостей учнів.

Учителі математики вважають, що математичні здібності можна відносити як до індивідуально-психологічних особливостей, так і до особистісних утворень. На їхню думку, ознаками математичних здібностей є швидке оволодіння математичними знаннями, розуміння пояснення вчителя, логічне й самостійне мислення, кмітливість у ході вивчення математики, швидке та глибоке запам'ятовування математичного матеріалу, понижена втомлюваність на заняттях з математики, а також пізнавальний інтерес до математики. Серед ключових професійно-особистісних якостей учителя, що забезпечують їх розвиток, називають любов до дітей, знання предмета та методики його навчання, повага до дитини, індивідуальний підхід до учня, знання психології дитини, уміння зацікавити математикою, терплячість і тактовність.

Учителі переконані, що краще розвиваються математичні здібності не на уроках (під час вивчення програмного матеріалу), а на позакласних заняттях із математики. Педагоги вважають, що далеко не всі діти здібні до математики, а відсоток таких дітей, знаходиться в межах 10-20%. З-поміж особистісних якостей математично обдарованих дітей називають норовливість та індивідуальний стиль, уважність і самоконтроль, доказовість і самостійність мислення, здібність до формалізації та узагальнення, швидку втомлюваність при виконанні однотипних завдань. До особливостей методики роботи зі здібними до математики учнями вчителі відносять реалізацію індивідуального підходу, збільшення кількості самостійних робіт та індивідуальних завдань, швидкий темп вивчення програмного матеріалу, провідну роль теорії (строге доведення теоретичних фактів). На їхню думку, дотепер бракує науково обґрунтованої методики і технології розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

Окрім цього, пілотне дослідження мало дати відповідь на питання про розвиток математичних здібностей першокурсників і випускників закладів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (математика). Попередньо підготовлено комплекти завдань, кожне з яких передбачало актуалізацію тих чи інших структурних компонентів математичних здібностей. Розроблено такі типи завдань:

1) розробити структурно-математичну модель змістової лінії (теми): *основні поняття та відношення ↔властивості основних понять і відношень (аксіоми) ↔ означувані поняття ↔ основні теореми та методи їх доведення ↔ основні типи задач і методи їх розв’язування;*

2) побудувати математичну модель прикладної задачної ситуації;

3) розв’язати математичну задачу одним із відомих методів, сформувати узагальнений спосіб дій у процесі розв’язування типових задач;

4) поставити у відповідність (формули, рівняння та їх геометричні інтерпретації);

5) розв’язати задачу олімпіадного типу, сформулювати евристичний припис і записати правило-орієнтир розв’язування;

6) скласти власну оригінальну задачу.

Аналіз одержаних експериментальних даних (рис. 1) привів до висновку, що високий рівень розвитку математичних здібностей показало лише 8% першокурсників (П), достатній – 14%, середній – 32%, низький – 46%.

У випускників (В) загальна картина розвитку названих особистісних утворень виявилася не набагато кращою: 12% – продемонструвало високий рівень розвитку, 18% – достатній, 29% – середній і 41% – низький.

Наприкінці пілотного дослідження було використано методи математичної статистики обробки числових даних. За l-критерієм Колмогорова-Смирнова знайдено точку, де сума розбіжностей між емпіричними розподілами в групах П і В найбільша, а також оцінено достовірність розбіжностей (таблиця 1).

Гіпотезу H_0 сформульовано так: емпіричні розподіли розвитку математичних здібностей першокурсників і випускників не відрізняються. Альтернативна гіпотеза H_1 передбачала, що емпіричні розподіли розвитку названих особистісних утворень відрізняються.

Рис. 1. Рівні розвитку математичних здібностей здобувачів освіти

Таблиця 1

Розрахунок l-критерію для зіставлення емпіричних розподілів розвитку математичних здібностей П і В

Рівні розвитку	Емпіричні частоти		Емпіричні відносні частоти		Накопичені емпіричні відносні частоти		Різниця d=|∑ СП*-∑ СВ*|
	П	В	П*	В*	∑П*	∑В*	
Низький	83	88	0,461	0,407	0,461	0,407	0,054
Середній	58	63	0,322	0,292	0,783	0,699	0,084
Достатній	25	39	0,139	0,181	0,922	0,880	0,042
Високий	14	26	0,078	0,120	1,000	1,000	0,000
Усього	180	216	1,000	1,000			

Отже, $d_{\max} = 0,084$. Значення λ-критерію обчислимо за формулою:

$$\lambda = d_{\max} \times \sqrt{\frac{n_e \times n_k}{n_e + n_k}} = 0,084 \times \sqrt{\frac{180 \times 216}{180 + 216}} = 0,83.$$

Критичне значення λ-критерію $\lambda_{кр} = 1,36$. Оскільки $0,83 < 1,36$, то розбіжності між емпіричними розподілами недостовірні. Тому приймається гіпотеза H_0.

Отож, результати пілотного дослідження підтвердили потребу в розробленні інноваційної технології математичної освіти.

2.2. Теоретичне обґрунтування проблеми дослідження. Інноваційна технологія навчання математики.

Вивченню проблеми дослідження передує змістовий аналіз психолого-педагогічної категорії «здібності». О. В. Скрипченко, О. С. Падалка, Л. О. Скрипченко здібності розкривають як індивідуально-психологічні особливості особистості, що виявляються в швидкості, глибині, міцності оволодіння способами і методами діяльності, в готовності до навчання. Здібності людини визначаються, насамперед, тим, наскільки вона досконало, легко та швидко оволодіває знаннями, уміннями і навичками [9, с. 249].

Здібності не зводиться до знань, умінь і навичок, але забезпечують швидке оволодіння ними, їх закріплення й ефективне використання на практиці [10].

Розроблена В. В. Рибалком тривимірна психологічна структура особистості містить генетичний вимір, у якому виокремлено здібності [11, с. 144-155].

У представленому дослідженні здібності – це цілісна підсистема в структурі особистості, те, що якісно її характеризує й забезпечує розвиток як суб'єкта діяльності, така підсистема визначає напрям і ефективність особистісного розвитку. Здібності розвиваються в діяльності, а продуктивність цього процесу зумовлена наявним рівнем розвитку особистості як цілісного утворення з трьома структурними вимірами: генетичним, діяльнісним, соціально-психолого-індивідуальним.

Специфіка математичних здібностей зумовлена особливостями математики – її абстрактним характером, дедуктивною суттю та строгістю доведень. Зміст математики складають абстракції (математичні моделі) й узагальнення. Це реалізується у використанні знакової символіки, спеціальних математичних знаків для позначення кількісних величин, просторових властивостей об'єктів і відношень між величинами.

Феномен математичних здібностей вивчається в роботах як зарубіжних, так і вітчизняних дослідників. Д. Лі вважав, що це здібності розуміти (схоплювати) основні поняття математики й маніпулювати ними [12]. І. Верделін зміст математичних здібностей розкривав через здібність розуміти сутність математичних систем, символів, методів і доведень, а також здібність заучувати, утримувати їх у пам'яті, репродукціювати, комбінувати з іншими системами, символами, методами, застосовувати при розв'язуванні математичних (їм подібних) задач [13, с. 13]. А. Роджерс і Є. Торндайк доводили, що математичні здібності утворюють центральну складову загального інтелекту [14; 15].

Вважаємо, що математичні здібності – це цілісна підсистема в структурі здібностей особистості, те, що характеризує здобувача освіти як унікальну людину, забезпечує особистісний розвиток як суб'єкта навчально-математичної діяльності та водночас слугує швидкому, легкому, глибокому та міцному оволодінню навчальним матеріалом математики [16, с. 105].

Питання про математичні здібності та математичну пам'ять обдарованих учнів студіюється у роботі Атіли Цабо [17]. На часі дослідження математичних здібностей випускників середніх шкіл, виконані групою зарубіжних авторів [18]. Психолого-педагогічні умови розвитку математичним здібностей старшокласників розкрито в роботі О. В. Чугунової [19]. Проблема розвитку математичних здібностей учнів у Новій українській школі порушується в роботі О. Р. Масюк [20].

До ключових понять дослідження віднесено поняття «математична компетентність». Вважаємо, що математична компетентність – це інтегрована характеристика якості особистості як суб'єкта діяльності в галузі математики, завдяки якій упроваджуються основні компоненти математичної структури (поняття, відношення, аксіоми), формулюються і доводяться математичні твердження (теореми), формулюються та розв'язуються задачі на побудову, дослідження і реалізацію математичних моделей, а також виконуються самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка процесу та результатів математичної (навчально-математичної) діяльності, планується її подальший зміст. До математичних компетенцій відносимо змістові та нормативно-функціональні характеристики математичної (навчально-математичної) діяльності суб'єкта, що окреслюють коло його фахово-математичних повноважень, установлюють нормативно-математичні функції в соціумі [21].

У представленій роботі концептуальним є положення про дуальну природу математичної компетентності, у якій її двоїсті феноменологічні характеристики мають зовнішні та внутрішні прояви. До зовнішніх проявів математичної компетентності відносимо соціально прийняті виміри та їх характеристики, що дозволяють суспільству судити про компетентність особистості в галузі математики. Натомість внутрішні її прояви окреслюємо індивідуально-психологічними вимірами та характеристиками якості особистості, завдяки яким математична компетентність є цілісною саморозвивальною системою. Розвиток учення про дуальну природу математичної компетентності втілився в побудові декартової реалізації, розкладанні зовнішнього та внутрішнього проявів такої компетентності в базисі трьох вимірів [3]. Обґрунтовано, що тривимірна структура зовнішнього прояву математичної компетентності має змістово-теоретичний, процесуально-діяльний і референтно-комунікативний виміри (рис. 2), а тривимірна структура внутрішнього прояву представляється ціннісно-мотиваційним, рефлексивно-оцінним, особистісно-психологічним вимірами (рис. 3).

З огляду на побудовані декартові реалізації стверджуємо, що і зовнішній, і внутрішній прояви математичної компетентності мають дванадцять змістових характеристик: на осі абсцис виокремлено три точки, на осі ординат – чотири, а на осі аплікат – п’ять точок. Інакше кажучи, співвідношення кількості змістових характеристик як зовнішніх, так і внутрішніх вимірів математичної компетентності віддзеркалює ознаку єгипетського трикутника, сторони якого утворюють найпростішу трійку Піфагора – 3, 4, 5.

Отож, як зовнішній, так і внутрішній прояви математичної компетентності мають тривимірну структуру, а відповідні виміри представляється однаковою кількістю змістових характеристик (показників).

Рис. 2. Тривимірна структура зовнішнього прояву математичної компетентності

Кількісний аналіз ранжованих показників у кожному з вимірів дозволили тлумачити математичну компетентність як одну і різновидів фрактала – тривимірну структуру, що складається з подібної до себе тривимірної підструктури. За результатами теоретичних досліджень установлено, що супровідний тригранник математичної компетентності (рис. 3) динамічно визначає тривимірну структуру її внутрішнього прояву і водночас встановлює зв'язок із тривимірною структурою зовнішнього прояву такої компетентності.

Для подальших методичних напрацювань важливим є положення про те, що всякий зовнішній прояв математичної компетентності має внутрішнє, індивідуально-психологічне та особистісне підґрунтя (процес екстеріоризації), а розвиток усякого внутрішнього її прояву досягається завдяки актуалізації зовнішніх проявів компетентності в навчально-математичній діяльності (процес інтеріоризації) [3].

У декартовій реалізації внутрішнього прояву математичної компетентності в особистісно-психологічному вимірі найвищу сходинку займають математичні здібності (рис. 3). Отож математичні здібності – це іманентна феноменологічна характеристика, суттєва ознака (атрибут) математичної компетентності, те, що найбільшою мірою репрезентує її особистісно-психологічний вимір. Його цілісність досягається завдяки єдності ранжованих складників: математичні здібності – самосвідомість («Я-концепція») у математичній діяльності – досвід математичної діяльності – дедуктивне і структурно-математичне мислення – пам'ять на математичний матеріал.

Установимо кореляційні зв'язки структурних компонентів математичних здібностей із вимірами зовнішнього прояву математичної компетентності.

Системотвірний компонент математичних здібностей (математична спрямованість розуму як особистісна характеристика, що виявляється в структурно-математичному мисленні, схильності та інтересі до побудови, дослідження й реалізації математичних моделей) корелює з трьома вимірами: X-вимір (змістово-теоретичний) визначає предмет математичної діяльності, У-вимір (процесуально-діяльний) окреслює її способи, Z-вимір (референтно-комунікативний) задає соціально-комунікативні обставини, за яких виконується системотвірна функція математичних здібностей.

Рис. 3. Тривимірна структура внутрішнього прояву математичної компетентності

Кодувально-формалізований компонент (здібності до формалізації в процесі встановлення математичної структури теоретичного і практичного матеріалу, створення й дослідження знако-символьних інтерпретацій задачних ситуацій) співвідноситься із зовнішніми вимірами так: Х-вимір визначає компоненти математичної структури, представляє множину і типи математичних моделей, У-вимір встановлює способи математичного моделювання, а Z-вимір забезпечує форми та засоби міжособистісної комунікації задля реалізації кодувально-формалізованої функції математичних здібностей.

Когнітивно-узагальнювальний компонент (здібності до змістового узагальнення математичного матеріалу на декількох рівнях, знаходження альтернативних (варіативних) та раціональних розв’язків, мисленнєвого „схоплення” типової формальної структури (алгоритму) на основі одного часткового випадку) пов'язується з тривимірною структурою математичної компетентності в такий спосіб: Х-вимір встановлює змістові узагальнення математичного матеріалу, У-вимір окреслює узагальнені способи дій у процесі розв'язування типових задач, Z-вимір забезпечує міжособистісну взаємодію, у якій актуалізується когнітивно-узагальнювальна функція математичних здібностей.

Мнемічно-узагальнювальний компонент (запам'ятовування математичного матеріалу на різних рівнях теоретичного узагальнення; пам'ять на типові відношення (формули), загальні схеми міркувань (алгоритми), структуру методів і способів розв'язування задач, доведення і дослідження) віддзеркалюється трьома вимірами так: Х-вимір окреслює математичний зміст мнемонічної діяльності, У-вимір визначає склад способів логіко-математичних дій для запам'ятовування, Z-вимір уможливлює міжособистісну комунікацію заради реалізації мнемічно-узагальнювальної функції математичних здібностей.

У ході розроблення інноваційної технології математичної освіти запроваджувалися такі теоретико-методичні концепти:

1. Розвиток математичних здібностей здобувачів освіти досягається завдяки актуалізації зовнішніх проявів математичної компетентності в навчально-математичній діяльності. Її потребово-мотиваційну основу формують потреба в особистісному самоствердженні, професійне самовизначення, а також інтерес до побудови, дослідження та реалізації математичних моделей.

2. Навчально-математична діяльність має задачну структуру, а отже, здійснюється в процесі постановки і розв'язування специфічних задач. Структура задачної системи будується за принцип розвивальної наступності: у визначеній ієрархії задачі різняться рівнем змістово-теоретичного узагальнення. Первісними є прикладні задачі, що розв'язуються методом математичного моделювання, а системотвірним поняття математики слугує поняття «математична модель».

3. Вивчення теоретичного матеріалу, розв'язування всіх типів задач здійснюється відповідно до загальнонаукового методу пізнання й мислення – сходження від загального (абстрактного) до конкретного (часткового). У навчальному пізнанні математики засадничу роль відіграють змістово-теоретичні дії (аналіз, узагальнення, абстрагування, планування, рефлексія), за результатами їх виконання створюються

навчально-математичні моделі: узагальнені способи дій у процесі розв'язування типових задач із математики.

4. Часткові задачі з математики передбачають покрокову реалізацію розроблених навчально-математичних моделей (узагальнених способів логіко-математичних дій) на етапі формування вмінь і навичок.

5. Рефлексія процесу учіння математики (самоаналіз, самоконтроль, самокорекція, самооцінка процесу та результатів навчальної роботи з математики) є невід'ємною складовою навчально-математичної діяльності здобувачів освіти. Вона виконується наприкінці кожного етапу навчального пізнання та має такі різновиди: змістова (теоретико-математична), процесуальна (способи дій у процесі розв'язуванням задач), референтна (тип соціальної поведінки), ціннісна (ціннісні орієнтири в навчанні математики).

6. Посутнім атрибутом технології розвитку математичних здібностей здобувачів освіти є усне і писемне мовлення, невербальне спілкування, референтність і асертивність поведінки в навчально-математичній діяльності (soft skills).

З огляду на вищезазначене, інноваційна технологія навчання математики реалізує принципово іншу модель організації навчального процесу, що вирізняється від традиційно усталеної: *теорія ↔ задачі ↔ знання ↔ контроль і оцінка.* Інноваційну дидактичну модель математичної освіти подано на рисунку 4.

Відповідно до цієї моделі розроблено розвивально-задачний метод навчання математики [16, с. 172–173], що реалізовується за такими етапами:

I етап. Постановка та розв'язування задачі (задач) у рамках засвоєного способу дій (створення ситуації успіху). Контроль та оцінка виконаної діяльності. Створення проблемної задачної ситуації, яка не може бути розв'язана на основі відкритих раніше знань і сформованих способів дій.

II етап. Постановка прикладної задачі-проблеми, її змістовий аналіз. Виділення генетичного відношення навчального матеріалу, створення його математичної моделі. Побудова математичної моделі задачної ситуації та її реалізація в процесі розв'язування математичної задачі. Обґрунтування способу розв'язування задачі, контроль виконаних дій та оцінка їх засвоєння.

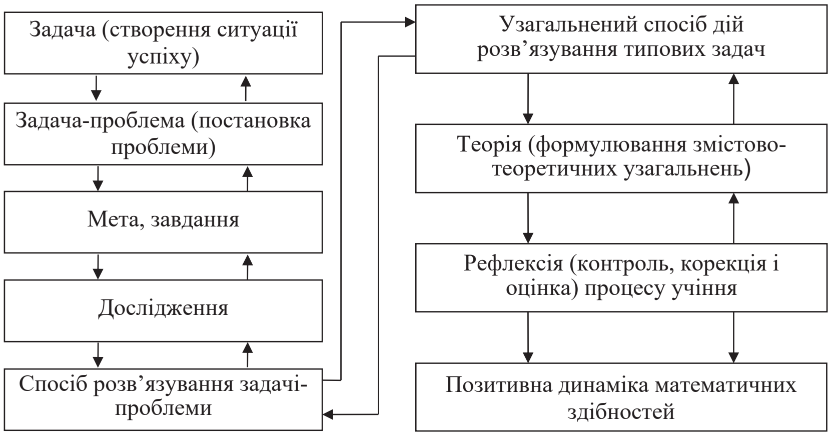

Рис. 4. Інноваційна дидактична модель математичної освіти

III етап. Постановка та розв'язування навчальної задачі. Формулювання евристичних приписів, конструювання загального способу (методу) розв'язування типових задач, побудова його навчальної моделі як ієрархії навчальних дій. Контроль за виконанням навчальних дій, їх корекція, оцінка засвоєння способу розв'язування типових задач.

IV етап. Реалізація побудованої навчальної моделі: конструювання та розв'язування системи часткових задач (прикладних, математичних) відповідно до логіки сходження від загального (абстрактного) до конкретного (часткового). Контроль і корекція навчальних дій в процесі розв'язування кожної задачі. Оцінка рівня засвоєння узагальненого способу дій.

V етап. Змістовий аналіз попередніх етапів, контроль навчальних дій, оцінка виконаної навчально-математичної діяльності. Формулювання нової задачі (навчально-теоретичної, навчально-дослідницької), що передбачає відкриття нових знань (способів дій), їх застосування в інших (нетипових) задачних ситуаціях, формування способу дій вищого рівня змістового теоретичного узагальнення. Планування змісту подальшої навчально-математичної діяльності.

До завдань представленого дослідження віднесено висвітлення психолого-педагогічних умов запровадження розробленої освітньої технології.

По-перше, має враховуватися, що розвиток математичних здібностей здобувачів освіти передбачає організацію навчально-математичної діяльності згідно з третім типом навчання. Тут зауважимо, що в психологічній теорії формування операційної основи дій виокремлено три типи навчання:

1) навчання за зразком, без наданих вказівок як потрібно виконувати ту чи іншу дію;

2) навчання за готовим алгоритмом, коли даються всі вказівки стосовно виконання завдання;

3) навчання за поглибленого змістового аналізу, результатом якого є знаходження способу дій, складання алгоритму розв'язування типових задач [22].

Направду навчання згідно з третім типом, з одного боку, представляється як процес навчальної діяльності (конструювання навчальної моделі способу дій), а з іншого – таке навчання актуалізує математичні здібності, передбачає виконання змістово-теоретичних дій, як-от аналіз, абстрагування, узагальнення, планування та рефлексія. Власне кажучи, не готовий алгоритм чи наведений зразок, а продуктивна мислительна діяльність лежить в основі третього типу навчання, яке відтак слугує ефективною формою розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

По-друге, врахування психолого-педагогічних умов розвитку математичних здібностей здобувачів освіти пов’язуємо з дотриманням принципів розвивального навчання:

– єдності навчання і виховання (забезпечення виховної функції через різні форми співпраці в навчальній діяльності).

– самодіяльності (діяльність без зовнішнього примушення, що приносить радість і задоволення);

– самоорганізації (формування операційно-діяльнісної складової навчання, в основі якої вміння навчатися самостійно);

– розвитку (організація навчального процесу в зоні найближчого розвитку – те, що здобувач освіти може виконувати у співпраці з педагогом (однолітками) із урахуванням досягнутого рівня його актуального розвитку);

– колективізму (навчання в організованій групі, що об’єднана соціально значущими цілями та важливим для кожного змістом навчальної діяльності);

– відповідальності (самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка навчальної роботи відповідно до прийнятих еталонів);

– особистості в колективі (встановлення взаємин у колективі, де здобувач освіти відчуває себе комфортно);

– індивідуального підходу (врахування в навчальному процесі індивідуальних особливостей кожного) [23].

По-третє, місце математичних здібностей в складному системному утворенні, яким є математична компетентність, установлені їх структурні зв’язки, зумовлюють віднесення до психолого-педагогічних умов сформованість основних показників кожного з шести вимірів (рис. 2, рис. 3):

– у ціннісно-мотиваційному вимірі математичної компетентності – сформовані потреби математичної діяльності;

– у рефлексивно-оцінному вимірі – сформована дія виконувати самоаналіз математичної діяльності;

– у особистісно-психологічному вимірі математичної компетентності – достатньо розвинена пам'ять на математичний матеріал;

– у змістово-теоретичному вимірі – сформовані основні математичні поняття (відношення);

– у процесуально-діяльному вимірі математичної компетентності – логіко-математичних операцій;

– у референтно-комунікативному вимірі – достатньо розвинене усне математичне мовлення.

По-четверте, до психолого-педагогічних умов розвитку математичних здібностей відносимо особистісну позицію педагога. Український психолог О.К. Дусавицький особистісну позицію педагога називає „суперпозицією в педагогічній діяльності”, оскільки головною її метою є виховання особистості. Така позиція передбачає встановлення не тільки суб’єкт-суб’єктних, але й міжособистісних відносин; вихід за межі навчальної діяльності та застосування інших, ніж у навчальній діяльності засобів спілкування (ідентифікації, емпатії) [24, с. 39]. Тут першочергову роль відіграє система цінностей педагога: повага та важливість розуміння здобувача освіти, здібність до особистісного вибору та здатність до особистісної відповідальності, значущість забезпечення радості учіння як творчого процесу.

Від особистісної позиції та прийнятої системи цінностей залежить тип педагогічної діяльності педагога. Традиційно усталений тип діяльності передбачає повідомлення, розповідь (ретрансляцію) і монолог, а отже, орієнтує на відтворення (репродукцію) наперед заданого зразка. Інший тип – реалізується через педагогічне спілкування, співробітництво й діалог, завдяки чому уможливлюється продуктивна мисленнєва діяльність. Саме друга система педагогічних дій, діяльність-співробітництво створює сприятливі умови для розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

Із-поміж дидактичних умов упровадження розробленої освітньої технології виокремлюємо гармонійне поєднання методів репродуктивної та продуктивної груп навчання, як-от евристичної бесіди, репродуктивного та дослідницького методів навчання. Серед педагогічних програмних засобів навчання акцентуємо увагу на використанні засобів динамічної математики. Тут важливо зазначити, що до методичних вимог віднесено розробленість системи евристичних і алгоритмічних приписів (правил-орієнтирів) у ході розв'язування задач, а також дидактично виважене використання засобів динамічної математики, приміром, програми «GeoGebra».

2.3. Експериментальна перевірка ефективності інноваційної технології навчання математики

Однією із засадничих ідей представленого дослідження є думка про те, що розвиток математичних здібностей, як і загалом, розвиток особистісно-психологічного виміру математичної компетентності, має забезпечуватися на етапі підготовки кваліфікованих педагогічних кадрів. Власне кажучи, в системі математичної освіти має запроваджуватися такий концепт: *математично компетентний і здібний до математики вчитель => математично компетентний і здібний до математики здобувач освіти*. У зв'язку з цим експериментальна перевірка ефективності розробленої технології навчання здійснювалася в системі фахової підготовки майбутніх учителів математики (спеціальність 014 Середня освіта (математика)).

Педагогічний експеримент проводився в університетах північного, східного, південного, центрального регіонів України, а представники генеральної сукупності мали однакову ймовірність увійти до вибіркової сукупності. Для визначення мінімального об'єму вибірки використано формулу

$n = \dfrac{\omega(1-\omega)\cdot t^2}{\Delta^2}$, де ω – вибіркова доля (0 < ω < 1),

Δ – гранична похибка довірчого інтервалу, t – аргумент функції Лапласа.

Довірчу ймовірність (надійність) вибрано p = 0,95, для якої за таблицями знайдено значення аргумента інтегральної функції Лапласа t = 1,96. Приймаючи вибіркову долю ω (для якої вираз ω(1-ω) набуває найбільшого значення), граничну похибку довірчого інтервалу Δ, обчислено мінімальний обсяг вибірки

$$n = \frac{0{,}5\cdot(1-0{,}5)\cdot 1{,}96^2}{0{,}05^2} \approx 384.$$

У експерименті взяло участь 402 майбутніх учителів математики (на контрольному зрізі), а отже, було дотримано статистичну вимогу щодо обсягу вибірки, а його результати з надійністю 0,95 і похибкою 0,05 поширено на всю генеральну сукупність.

Контрольні групи (КГ) здобувачів вищої освіти навчалися за традиційною технологією, а в експериментальних групах (ЕГ) упроваджувалася інноваційна технологія навчання математики. Аналіз початкових зрізів привів до висновку про те, що рівні розвитку математичних здібностей у КГ і ЕГ не відрізняються. На початку формувального етапу педагогічного експерименту контрольна і експериментальна групи здобувачів вищої освіти були однорідними. Результати контрольних зрізів засвідчили вплив на динаміку математичних здібностей інноваційної освітньої технології.

У 19% респондентів ЕГ виявлено високий рівень розвитку математичних здібностей, у 24% – достатній, у 31% – середній, а 26% респондентів мали низький рівень розвитку. Отже, не нижче середнього рівня розвитку математичних здібностей виявили 74% здобувачів вищої освіти ЕГ (рис. 5).

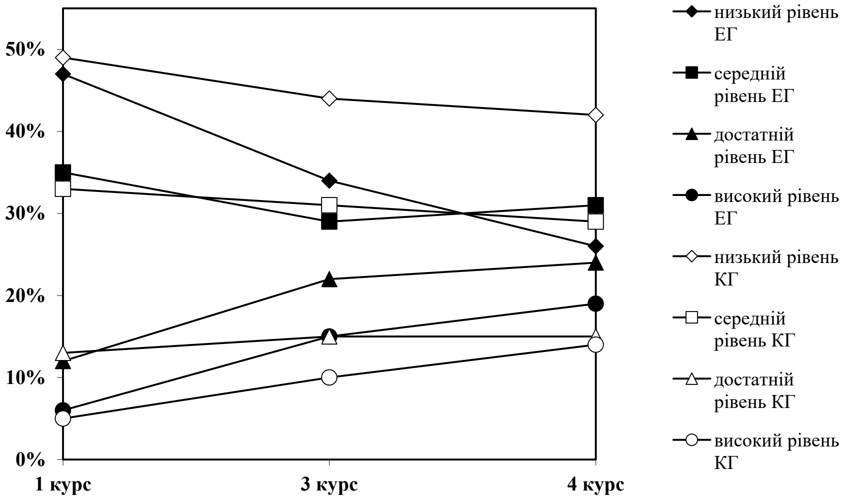

Рис. 5. Динаміка математичних здібностей здобувачів освіти

Простежувалася загальна тенденція зменшення кількості респондентів з низьким і середнім рівнями розвитку математичних здібностей, а найістотніші зміни відбулися на достатньому рівні розвитку: на 12% більше порівняно з першокурсниками.

За результатами оброблення експериментальних даних з'ясувалося, що в 58% старшокурсників КГ рівень розвитку математичних здібностей виявився не нижче середнього. Окрім цього, незначним були відсоткові зміни кількості здобувачів вищої освіти КГ з низьким рівнем розвитку математичних здібностей, а на достатньому й високому рівнях розвитку зазначений показник покращився на 2% і 9% відповідно.

По завершенню педагогічного експерименту було використано методи математичної статистики обробки числових даних. За λ-критерієм Колмогорова-Смирнова знайдено точку, в якій сума розбіжностей між емпіричними розподілами в ЕГ і КГ найбільша, а також оцінено достовірність розбіжностей (таблиці 2 – 3).

Гіпотезу H_0 сформульовано так: емпіричні розподіли розвитку математичних здібностей в КГ і ЕГ не відрізняються. Альтернативна гіпотеза H_1 передбачала, що емпіричні розподіли розвитку названого особистісного утворення в КГ і ЕГ відрізняються.

Таблиця 2

Розрахунок l-критерію для зіставлення емпіричних розподілів розвитку математичних здібностей в ЕГ і КГ (за результатами початкового зрізу)

Рівні розвитку	Емпіричні частоти		Емпіричні відносні частоти		Накопичені емпіричні відносні частоти		Різниця d=∑ f*e-∑ f*k
	fe	fk	f*e	f*k	∑ f*e	∑ f*k	
Низький	114	108	0,471	0,489	0,471	0,489	**0,018**
Середній	85	73	0,351	0,330	0,822	0,819	0,003
Достатній	29	29	0,120	0,131	0,942	0,950	0,008
Високий	14	11	0,058	0,050	1,000	1,000	0,000
Усього	242	221	1,000	1,000			

Отже, $d_{\max} = 0,018$. Значення -критерію обчислимо за формулою:

$$\lambda = d_{\max} \times \sqrt{\frac{n_e \times n_k}{n_e + n_k}} = 0,018 \times \sqrt{\frac{242 \times 221}{242 + 221}} = 0,19.$$

Згідно з λ-критерієм, оскільки $0,19 < 1,36$, то розбіжності між емпіричними розподілами в ЕГ і КГ на початковому зрізі недостовірні. Тому приймається гіпотеза H_0.

Отже, d_{ma}= 0,162. Значення l-критерію обчислимо за формулою:

$$\lambda = d_{\max} \times \sqrt{\frac{n_e \times n_k}{n_e + n_k}} = 0,162 \times \sqrt{\frac{212 \times 190}{212 + 190}} = 1,62.$$

Отримане значення λ = 1,62 відповідає рівню статистичної значимості ρ = 0,011. Критичне значення приймаємо таким: $\lambda_{0,05}$ = 1,36. Згідно з λ-критерієм, оскільки 1,62>1,36, то розбіжності між емпіричними розподілами в ЕГ і КГ достовірні. Тому приймається гіпотеза H_1.

Отож на основі λ критерію Колмогорова-Смирнова з'ясовано, що на початковому зрізі ЕГ і КГ були однорідними, а на контрольному зрізі статистичні розподіли стали відрізнятися. Так у дослідженні ефективність інноваційної технології було перевірено методами математичної статистики.

Таблиця 3

Розрахунок λ-критерію для зіставлення емпіричних розподілів розвитку математичних здібностей в ЕГ і КГ (за результатами контрольного зрізу)

Рівні розвитку	Емпіричні частоти		Емпіричні відносні частоти		Накопичені емпіричні відносні частоти		Різниця d=∑ f*e-∑ f*k
	fe	fk	f*e	f*k	∑ f*e	∑ f*k	
Низький	55	80	0,259	0,421	0,259	0,421	**0,162**
Середній	66	55	0,311	0,290	0,570	0,711	0,141
Достатній	51	28	0,241	0,147	0,811	0,858	0,047
Високий	40	27	0,189	0,142	1,000	1,000	0,000
Усього	212	190	1,000	1,000			

Підсумовуючи, зазначимо, що впровадження розробленої освітньої технології має такі результати:

1. Забезпечується системність математичних знань, що виявляється в структурно-математичному аналізі навчального матеріалу, його структурно-математичному моделюванні: *основні поняття та відношення ↔ властивості основних понять і відношень (аксіоми) ↔ означувані поняття ↔ основні теореми та методи їх доведення ↔ основні типи задач і методи їх розв'язування.* Завдяки розвитку структурно-математичного мислення позитивні зміни відбуваються в системотвірному компоненті математичних здібностей здобувачів освіти.

2. Досягаються якісні зміни в процесі математичного моделювання задачних ситуацій, застосування здобувачами освіти методу математичного моделювання. Направду ефективність забезпечили обізнаність і цілісне запровадження ЕГ структури методу математичного моделювання: *змістовий аналіз прикладної задачі ↔ формалізація ↔ побудова математичної моделі ↔ формулювання математичної задачі ↔ знаходження розв'язку математичної задачі ↔ інтерпре-*

тація розв'язку. Позитивної динаміки зазнає кодувально-формалізований компонент математичних здібностей здобувачів освіти.

3. Простежуються позитивні зміни щодо змістового узагальнення математичного матеріалу, опанування здобувачами освіти узагальненими способами дій в процесі розв'язування математичних задач. Навчально-математична діяльність здобувачів освіти зорієнтована, здебільшого, на знаходження способу дій (складання алгоритму, формулювання правила-орієнтиру). Так чи інакше забезпечується розвиток когнітивно-узагальнюваного компоненту математичних здібностей здобувачів освіти.

4. Збільшується відсоток здобувачів освіти, які виконують завдання на відповідність, розв'язують задачі олімпіадного типу, а також складають власні оригінальні задачі. Простежується позитивна динаміка в мнемічно-узагальнювальному компоненті математичних здібностей здобувачів освіти.

Подальші дослідження стосувалися зон найближчого математичного розвитку і технології розвивального навчання математики.

3. Учення про зони найближчого математичного розвитку і технологія розвивального навчання математики

У сучасних науково-методичних дослідженнях студіюються питання, що тісно пов'язані з порушеною в роботі проблемою. Так в осібних наукових працях фокусується увага на такому:

– розвиток креативного мислення в навчанні елементарної математики (на прикладі запровадження онлайн-курсу) [25];

– розвиток математичного уявлення учнів під час розв'язування задач з геометрії на основі когнітивного стилю пізнання [26];

– актуалізація високого рівня математичних здібностей учнів середньої школи через рефлексивну абстракцію в навчанні квадратних рівнянь [27];

– розвиток математичного логічного мислення студентів сільськогосподарських районів [28];

– підвищення якості математичної освіти учнів (аналітика і діагностика) [29];

– розвиток логічного мислення старшокласників шляхом проблемного підходу до навчання математики [30];

– поліпшення компетентності математичної інтерпретації в умовах застосування портфоліо [31];

– творчі математичні міркування майбутніх учителів у розв'язуванні задач на основі можливостей оперативної пам'яті [32];

– уплив математики на стійкий розвиток мислення молоді [33];

– компетентнісний підхід до систематизації математичних задач у профільній школі [34];

– роль і місце математичних здібностей у структурі математичної компетентності здобувачів освіти, методика їх розвитку [35];

– зони найближчого математичного розвитку здобувачів освіти та методика розвивального навчання математики [36].

3.1. Пілотне дослідження проблеми.

Пілотне дослідження передбачало експертне оцінювання значущості факторів у навчанні математики. Серед досвідчених учителів математики було відібрано 10 експертів, які брали участь в анкетуванні. Ними провадилося ранжування основних проявів (факторів) математичних здібностей.

Фактор 1. Швидкість, легкість і глибина засвоєння математичного матеріалу.

Фактор 2. Зацікавленість математикою.

Фактор 3. Схильність до математизації прикладних задач, побудови та реалізації математичних моделей.

Фактор 4. Здатність до узагальнення змісту математичного матеріалу (фактів теорії, прийомів, способів і методів розв'язування задач).

Фактор 5. Пам'ять на математичний матеріал, що реалізується на декількох рівнях узагальнення.

Фактор 6. Математична інтуїція (здатність до цілісного «схоплення» проблемної задачної ситуації), ага-переживаннями в процесі розв'язування задач.

Підсумки результатів опитування представлено в таблиці (таблиця 4).

Опісля опитування перевірено узгодженість суджень експертів. Для цього вираховувався коефіцієнт конкордації Кендала (коефіцієнт множинної рангової кореляції)

$$W = \frac{12S}{m^2\left(n^3 - n\right)},$$

де m – кількість експертів у групі, n – кількість досліджуваних факторів,

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}R_{ij}\right)^{2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{ij}\right)^{2}}{n}.$$

W < 0,35 – узгодженість експертів низька.
0,35 ≤ W < 0,55 – узгодженість експертів середня;
0,55 ≤ W < 0,75 – узгодженість експертів достатня;
0,75 ≤ W < 1 – узгодженість експертів висока;
W = 1 – судження експертів збігаються.

Таблиця 4

Значущість факторів прояву математичних здібностей

	Фактор 1	**Фактор 2**	**Фактор 3**	**Фактор 4**	**Фактор 5**	**Фактор 6**	
Експерт 1	3	4	5	2	6	1	
Експерт 2	1	3	2	6	5	4	
Експерт 3	1	3	2	5	6	4	
Експерт 4	1	5	3	4	6	2	
Експерт 5	2	3	5	1	4	6	
Експерт 6	3	1	5	2	6	4	
Експерт 7	1	3	2	6	5	4	
Експерт 8	1	3	2	4	5	6	
Експерт 9	1	2	5	4	3	6	
Експерт 10	1	2	5	3	4	6	
Сума	15	29	36	37	50	43	210
Квадрат суми	225	841	1296	1369	2500	1849	8080

З огляду на отримані дані обчислено коефіцієнт конкордації Кендала $W=0,42$.

Отже, узгодженість учителів-експертів щодо основних проявів математичних здібностей є середньою. На нашу думку, одержаний результат зумовлений специфікою математичних здібностей, щоправда, неоднозначністю прийнятих характеристичних ознак, а також браком обізнаності навіть досвідчених учителів у змісті та структурі досліджуваного феномену. Насправді на часі саєнтифікація математичної освіти в розрізі реалізації її розвивальної функції.

Здійснювалося експертне оцінювання значущості факторів розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

Фактор 1. Професійно-особистісні якості вчителя (педагогічні та математичні здібності, фахова компетентність, здібність зацікавити математикою, креативність мислення, любов до дітей, терплячість та ін.)

Фактор 2. Методика навчання математики.

Фактор 3. Математичні задатки.

Фактор 4. Мотивація навчання (пізнавальний інтерес).

За результатами опитування складено таблицю (таблиця 5).

Таблиця 5

Значущість факторів розвитку математичних здібностей

	Фактор 1	**Фактор 2**	**Фактор 3**	**Фактор 4**	
Експерт 1	4	3	1	2	
Експерт 2	4	3	1	2	
Експерт 3	3	4	1	2	
Експерт 4	2	4	3	1	
Експерт 5	2	3	4	1	
Експерт 6	2	4	1	3	
Експерт 7	2	4	1	3	
Експерт 8	3	4	1	2	
Експерт 9	3	4	1	2	
Експерт 10	3	4	1	2	
Сума	28	37	15	20	100
Кв. суми	784	1369	225	400	2778

Обчислено коефіцієнт конкордації Кендала $W = 0,56$.

Отож, узгодженість учителів-експертів стосовно факторів розвитку математичних здібностей здобувачів освіти є достатньою. Більшість експертів першочерговими факторами назвали математичні задатки і пізнавальний інтерес, а от найменше значущою виявилася сучасна методика навчання математики. Педагоги вважають, що розвиток математичних здібностей більшою мірою забезпечує розв’язування задач на доведення та дослідження, навчання здобувачів освіти алгоритмічним і евристичним прийомам розумової діяльності. Опитані вчителі наголошують на проблемі методичного забезпечення розвитку математичних здібностей, відсутності науково обґрунтованої розвивальної технології навчання математики.

3.2. Теоретичне обґрунтування проблеми дослідження. Технологія розвивального навчання математики.

Поняття «зона найближчого розвитку» введено психологом Л. С. Виготським, який обґрунтував його теоретичне значення в педагогічній психології (психології розвитку). На думку вченого, навчання пов’язане з розвитком, але ці процеси не проходять рівномірно і паралельно, навчання нетотожне розвитку, воно створює «зону найближчого розвитку», пробуджує внутрішні процеси, які через співробітництво (взаємодію), стають надбанням самої дитини. Зона найближчого розвитку – це відстань між рівнем актуального розвитку дитини, що визначається її самостійними досягненнями та рівнем можливого розвитку, окресленого завданнями, які вирішуються дорослими, передусім, батьками, вихователями, вчителями [22].

Саме від діяльнісного співробітництва вчителя (викладача) і здобувачів освіти, а також їхньої співпраці, що набуває колективних і колективно розподілених форм роботи (групових, парних), залежить ефективність вирішення навчальних завдань, а головне, перебіг процесу розвитку індивідуально-психологічних якостей особистості. Низький рівень самостійності здобувачів освіти (високий рівень допомоги) передбачає навчальну роботу, зорієнтовану на встановлення зон розуміння задачної ситуації (як-от її структури, змісту умови й вимоги, понятійної складової, відношень та їх властивостей, необхідних і достатніх умов), актуалізацію теоретичного мислення й активізацію колективно розподіленої навчальної діяльності. За таких умов проходить процес інтеріоризації – засвоєння здобувачем освіти зовнішніх дій і соціальних форм спілкування, формування розумових дій і свідомості. У такий спосіб відбувається перехід від колективної діяльності до індивідуальної, розширюється зона актуального розвитку і, власне кажучи, завершується цикл розвивального навчання (рис. 6).

З огляду на вищезазначене, вважаємо, що зона найближчого розвитку – це така складова навчання, в якій, по-перше, за результатами спільної діяльності встановлюється міра самостійності здобувачів освіти в оволодінні культурною формою поведінки, по-друге, організовується доцільна колективна (колективно розподілена) навчальна діяльність задля опанування цією формою, по-третє, феноменологічною характеристикою такого навчання є інтеріоризація, за результатами якої культурна форма поведінки стає індивідуальною функцією здобувачів освіти.

Визначення родової категорії проблеми дослідження вможливлює формулювання означення видового поняття. Зона найближчого математичного розвитку – це така складова навчання математики, в якій, по-перше, за результатами спільної діяльності встановлюється міра самостійності здобувача освіти в оволодінні способом дій у процесі розв’язування нового типу задач, по-друге, організовується доцільна колективна (колективно розподілена) навчально-математична діяльність задля опанування новими знаннями та вміннями, по-третє,

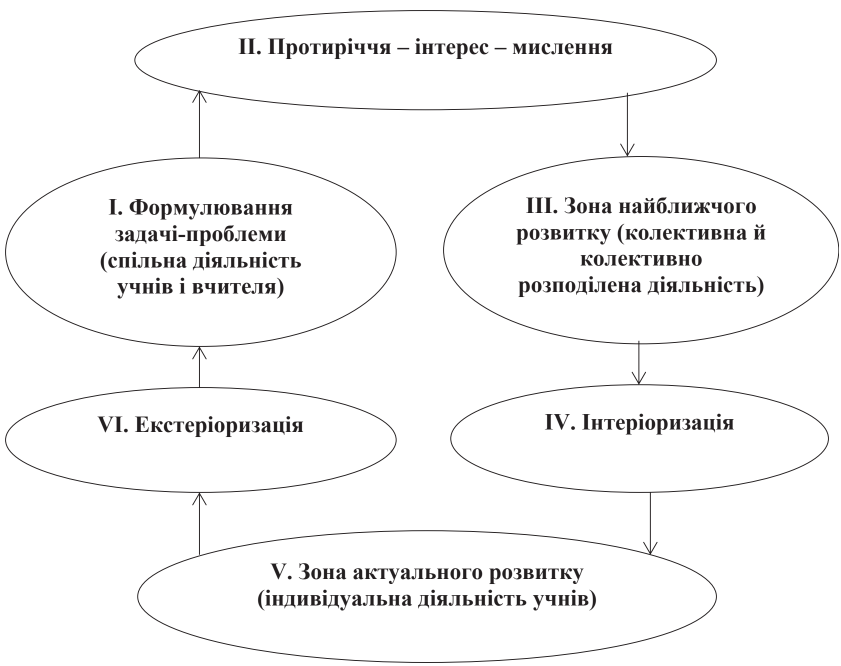

Рис. 6. Цикл розвивального навчання

феноменологічною характеристикою такого навчання є інтеріоризація, за результатами якої певний тип задач здобувачем освіти розв'язується самостійно, а його індивідуально-психологічні якості мають вищий рівень розвитку.

Перебіг процесу перетворення зони найближчого розвитку в зону актуального розвитку залежить, передусім, від психологічно зваженої та методично довершеної організації навчально-математичної діяльності. Тут акцентуємо увагу на тому, що шлях навчального пізнання має вирізнятися від традиційно усталеного, експлуатуючого зону актуального розвитку: *теорія ↔ задачі ↔ знання, вміння ↔ контроль і оцінка.* Розвивальне навчання має зацікавлювати, спонукати процес мислення, орієнтувати, передусім, на розуміння (осмислення), а не на відтворення через запам'ятовування готових алгоритмів. Отож має запроваджуватися нелінійна організація навчання математики, реалізовуватися задачний підхід до організації математичної діяльності та розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

Концептуальним положенням дослідження є судження про те, що структурно-функціональні особливості зон найближчого математичного розвитку репрезентує принцип розвивальної наступності навчання математики та задачна структура навчально-математичної діяльності. У такий спосіб забезпечено відповідність дедуктивній суті математики, а також зроблено акцент на феноменологічній характеристиці математичних здібностей – спроможності узагальнювати зміст математичної освіти.

За принципом розвивальної наступності кожен наступний тип задач відрізняється від попереднього вищим рівнем змістово-теоретичного узагальнення. Саме так задачна система навчання математики співвідноситься із зонами найближчого математичного розвитку здобувачів освіти. Це вможливлює виокремлення чотирьох зон найближчого математичного розвитку: *базова, навчальна, навчально-теоретична і навчально-дослідницька* [16, с. 134].

І рівень: *базова зона* – формулюються та розв'язуються базові (прикладні) задачі з математики, формуються вміння створювати математичні моделі, встановлювати способи дій у процесі розв'язування часткових задач із математики, їх планувати, контролювати виконання та оцінювати ступінь оволодіння.

II рівень: *навчальна зона* – формулюються та розв’язуються навчальні задачі з математики, формуються вміння створювати навчальні моделі, встановлювати способи дій у процесі розв’язування типових задач з математики, їх планувати, виконувати самоконтроль і самокорекцію, здійснювати самооцінку ступеня засвоєння.

III рівень: *навчально-теоретична зона* – формулюються та розв’язуються навчально-теоретичні задачі з математики, формуються вміння створювати навчально-теоретичні моделі, встановлювати і застосовувати методи розв’язування задач змістових математичних ліній, загальнологічні та загальноматематичні методи розв’язування (доведення і дослідження), а також вміння виконувати самоконтроль і самокорекцію, здійснювати самооцінку ступеня засвоєння.

IV рівень: *навчально-дослідницька зона* – формулюються та розв’язуються навчально-дослідницькі задачі з математики, формуються дослідницько-математичні вміння, а також уміння робити теоретичний аналіз навчальної та науково-математичної літератури, застосовувати методи математичного пізнання та дослідження, визначати змістовні компоненти наукового дослідження (об’єкт, предмет, мета, завдання, гіпотеза, наукова новизна, математична методологія). Важливим атрибутом навчально-дослідницької зони найближчого математичного розвитку слугують елементи наукової новизни одержаних результатів.

До стрижневих методів представленого дослідження належить моделювання. У великому тлумачному словнику української мови під категорією «модель» розуміється «уявний чи умовний (зображення, опис, схема та ін.) образ якого-небудь об’єкта, процесу або явища, що використовується як його представник» [37, с. 535]. У педагогічних дослідженнях послуговуються визначенням «модель» С. У. Гончаренка: «… уявна або матеріально реалізована система, яка відображаючи чи відтворюючи об’єкт дослідження, може замінити його таким чином, що сама стає джерелом інформації про сам об’єкт» [38, с. 310].

Моделювання, власне кажучи, є процесом створення моделі. Так у педагогічному словнику за редакцією М. Д. Ярмаченка «моделювання» визначається як процес дослідження певних явищ, процесів або систем об’єктів шляхом побудови та вивчення їх моделей. Моделювання відноситься до основних категорій пізнання, на якому ґрунтується як теоретичний, так і експериментальний методи наукового дослідження [39, с. 206].

Скориставшись системним підходом і методом моделювання, побудуємо методичну модель розвитку математичних здібностей здобувачів освіти. У ході побудови моделі виходимо з таких засадничих положень:

1. Системотвірними компонентами моделі розвитку математичних здібностей слугують зони актуального та найближчого математичного розвитку здобувачів освіти.

2. Етапність навчання математики передбачає визначення зон актуального математичного розвитку, створення зон найближчого математичного розвитку, перетворення найближчих зон розвитку в актуальні.

3. Зони найближчого математичного розвитку здобувачів освіти співвідносяться із рівнем змістового узагальнення задач у структурі навчально-математичної діяльності.

4. У процесі розв'язування задач (базових, навчальних, навчально-теоретичних, навчально-дослідницьких) актуалізуються основні компоненти математичних здібностей – системотвірний, кодувально-формалізований, когнітивно-узагальнювальний, мнемічно-узагальнювальний.

5. Кожен із етапів навчального пізнання (розвитку математичних здібностей) завершується рефлексією процесу учіння математики.

6. У проектуванні методичної моделі розвитку математичних здібностей ураховуються ймовірнісні чинники, зумовлені рівнем математичної підготовки (зоною актуального математичного розвитку) та наявним рівнем розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

Імовірнісні (випадковим чином) детерміновані структурні компоненти, що визначаються на першому етапі реалізації моделі та зумовлюють зміст і специфіку перебігу наступних етапів, дозволяють її віднести до категорії теоретико-ймовірнісних методичних моделей (рис. 7).

Під теоретико-ймовірнісною методичною моделлю будемо розуміти систему, яка, з одного боку, окреслює сутнісні зв'язки досліджуваного феномена, розкриває його структуру й феноменологічні характеристики, а з іншого боку – репрезентує ймовірнісні чинники та вказує як саме, в який спосіб досягається повноцінне (цілісне) його функціонування (розвиток).

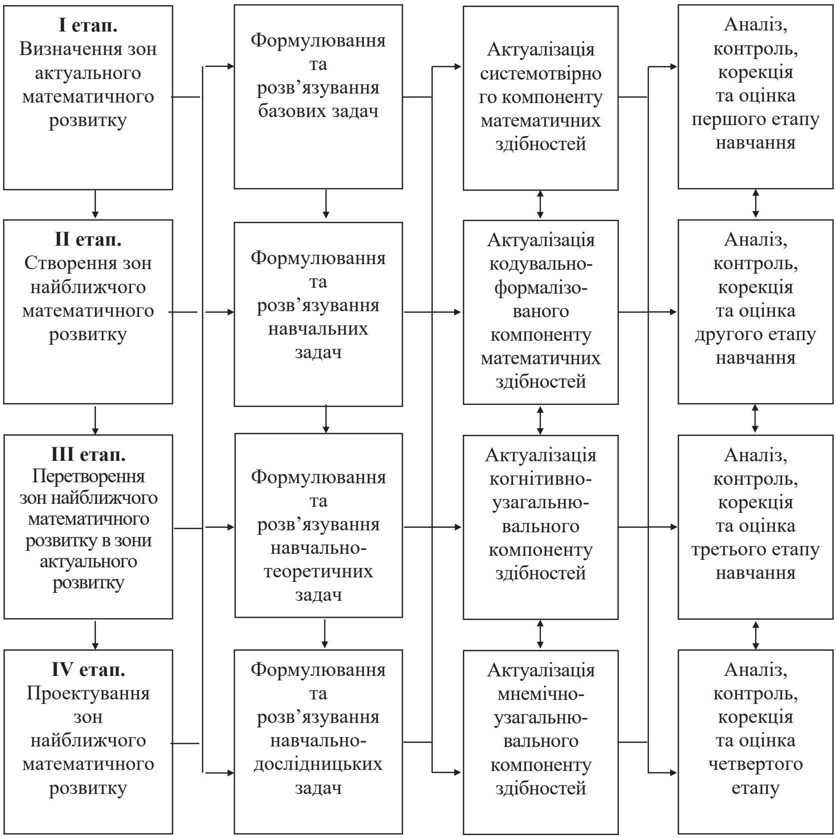

Рис. 7. Теоретико-ймовірнісна методична модель розвитку математичних здібностей здобувачів освіти

Розкриємо зміст технології розвивального навчання математики.

I етап. *Визначення зон актуального математичного розвитку здобувачів освіти.*

Суть цього етапу полягає у формулюванні та розв'язуванні базових задач з математики, за результатами чого встановлюються способи дій, якими вже оволоділи здобувачі освіти. Тут можливим є встановлення передбазової зони актуального математичного розвитку, у рамках якої способи дій несформовані. Вищому рівню змістового узагальнення задачної ситуації відповідає формулювання навчальних (навчально-теоретичних) задач із математики, з'ясування сформованості способів дій у процесі розв'язування типових задач. Так установлюється, якою формою культурної поведінки оволоділи здобувачі освіти, з якими задачами (типами задач) вони справляються самостійно. З огляду на вивчений матеріал робиться аналіз, контроль, корекція й оцінка його засвоєння, а також дається відповідь на питання про те, якою є зона актуального математичного розвитку: передбазова, базова, навчальна, навчально-теоретична, навчально-дослідницька. У підсумку створюється матриця відповідності зон актуального математичного розвитку та зон найближчого математичного розвитку, в якій подається список здобувачів освіти, їхні зони розвитку, типи задач для розв'язування, форми та засоби навчальної роботи.

II етап. *Створення зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти.*

На другому етапі створюється проблемна задачна ситуація, з якою здобувачі освіти не можуть впоратися самостійно. Формулюється прикладна задача з математики, що передбачає вивчення нового матеріалу. За колективних і колективно розподілених форм навчальної роботи розв'язується базова (прикладна) задача з математики, реалізується метод математичного моделювання, будується математична модель. Зважаючи на встановлені на першому етапі зони актуального розвитку, формулюються і розв'язуються навчальні (навчально-теоретичні) задачі. За результатами колективної навчально-математичної діяльності розробляється навчальна (навчально-теоретична) модель розв'язування типових задач. У підсумку будується узагальнений спосіб дій (формулюються евристичні та алгоритмічні приписи) у процесі розв'язування типових задач з математики, здійснюється аналіз, контроль, корекція і оцінка його засвоєння. Осібне місце відводиться груповим і парним формам роботи. Окрім вищезазначеного на другому етапі вможливлюється формулювання навчально-дослідницької задачі, а відтак створення навчально-дослідницької зони найближчого математичного розвитку найздібніших здобувачів освіти.

III етап. *Перетворення зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти в зони їхнього актуального математичного розвитку.*

На третьому етапі превалюють індивідуальні форми навчальної роботи, забезпечується процес інтеріоризації. Тут реалізовуються створені навчальні (навчально-теоретичні) моделі, індивідуально розв'язуються базові (навчальні, навчально-теоретичні) задачі з математики, самостійно виконуються дії в процесі формулювання та застосовування математичних понять і теорем. Найздібніші здобувачі освіти виконують завдання дослідницько-математичного змісту, реалізовують методологію математичного дослідження. Квінтесенцією цього етапу є самоаналіз, самоконтроль, самокорекція й самооцінка оволодіння узагальненого способу дій у процесі розв'язування типових задач. Кваліфіковано виконана рефлексія процесу і результатів учіння математики засвідчує про нову інтелектуальну якість, про рівень розвитку математичних здібностей кожного здобувача освіти. Відтак індивідуально встановлюється, чи насправді найближча зона математичного розвитку трансформувалася в актуальну. Отож результатами реалізації третього етапу навчання є верифікація (підтвердження істинності) вірогідного факту: чи досягнуто нової, вищої зони актуального математичного розвитку в порівнянні з тією зоною, що була встановлена на першому етапі навчання.

IV етап. *Проектування зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти в навчанні математики.*

Установлені на третьому етапі зони актуального математичного розвитку здобувачів освіти слугують основою для проектування їхніх зон найближчого математичного розвитку. З огляду на навчально-математичні досягнення, типи задач, що розв'язуються самостійно, здійснюються коректування матриці відповідності зон актуального математичного розвитку та зон найближчого математичного розвитку. Указуються основні типи задач, у процесі розв'язування яких встановлюються зони актуального математичного розвитку та створюються зони найближчого математичного розвитку, а також зазначаються форми та засоби навчальної роботи. Скоректована матриця відповідності слугує підґрунтям для подальшої реалізації методичної моделі, починаючи з другого етапу – створення зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти.

До психолого-педагогічних умов запровадження освітньої технології віднесено такі обставини:

1) організацію навчально-математичної діяльності здобувачів освіти відповідно до третього типу навчання, представленого психологічною теорією формування операційної основи дій;

2) дотримання психолого-педагогічних принципів розвивального навчання;

3) сформованість основних показників кожного з шести вимірів математичної компетентності;

4) особистісну позицію педагога як суперпозицію педагогічної діяльності, що передбачає конструктивний діалог, діяльність-співробітництво.

Дидактичні умови в дослідженні представлені методами активного навчання, як-от проблемний метод і евристична бесіда, розвивально-задачний і дослідницький методи. Зроблено акцент на дидактично виваженому використанні засобів динамічної математики, передусім, програми «GeoGebra». Тут варто зазначити, що GeoGebra – програмне забезпечення, що надає можливість створення динамічних («живих») креслень, забезпечує візуалізацію програмного матеріалу алгебри, геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики. Підтверджено дидактичну доцільність використання такої програми в ході реалізації другого і третього етапів представленої освітньої технології: створення зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти та перетворення таких зон в зони актуального математичного розвитку. Її перевагою є можливість покрокової побудови фігур, ілюстрації динаміки властивостей графіка. Насправді можливість анімовано змінювати координати точок дозволяє фігурі нібито «ожити» на моніторі, змінити її зображення, що відіграє евристичну роль, створює підґрунтя для ага-переживань здобувачів освіти. GeoGebra вільно поширювана, має багатий математичний інструментарій, дозволяє створювати динамічні креслення, будувати геометричні моделі, надає широкі можливості для роботи з функціями. Натепер популярною є версія GeoGebra 5.0 [40].

3.3. Експериментальна перевірка ефективності технології розвивального навчання математики.

Експериментальне навчання було організовано в класах математичного профілю старшої школи. Мінімальний обсяг вибірки, що забезпечує достовірні оцінки параметрів генеральної сукупності, обчислювався за формулою

$$n = \frac{\omega(1-\omega)\cdot t^2}{\Delta^2},$$

де ω – вибіркова доля $(0<\omega<1)$, Δ – гранична похибка довірчого інтервалу, t – аргумент інтегральної функції Лапласа.

Приймаючи довірчу ймовірність (надійність) $P(|p-\omega|<\Delta)=0{,}96$, за таблицями отримано значення аргумента інтегральної функції Лапласа $t=2{,}10$. Ураховуючи вибіркову долю $\omega=0{,}5$ і граничну похибку довірчого інтервалу $\Delta=0{,}04$, обчислено мінімальний об'єм вибірки

$$n = \frac{0{,}5\cdot(1-0{,}5)\cdot 2{,}1^2}{0{,}04^2} \approx 441.$$

У експерименті взяло участь 466 старшокласників, відтак, було дотримано статистичну вимогу щодо обсягу вибірки, а його результати з надійністю 0,96 і похибкою 0,04 поширено на всю генеральну сукупність.

З огляду на компоненти математичних здібностей у дослідженні розроблено експериментальну змістову структуру розвитку названого феномену, у якій конкретизовано показники для діагностики рівнів розвитку:

1) інтерес до вивчення математики;

2) здібність до формалізації, створення й дослідження знако-символьних інтерпретацій (моделей) задачних ситуацій;

3) здібності до змістового узагальнення навчального матеріалу математики, мисленнєве «схоплення» формальної структури (алгоритму) на основі часткового випадку;

4) здібність до запам'ятовування математичного матеріалу на різних рівнях теоретичного узагальнення, пам'ять на типові відношення (формули), загальні схеми міркувань (алгоритми), структуру методів і способів розв'язування задач (доведення, дослідження).

Зважаючи на визначені показники, розроблено комплекти завдань, що передбачали:

1) тестування інтересу до вивчення математики;

2) побудову математичної моделі;

3) складання алгоритму розв'язування типових задач;

4) встановлення відповідностей;

5) розв'язування задач на доведення (дослідження);

6) розв'язування олімпіадних задач.

За 100-бальною шкалою оцінювання діагностувалися низький, середній, достатній і високий рівні розвитку математичних здібностей. Творчий рівень констатувався тоді, коли за високого рівня розв'язувалася олімпіадна задача.

Навчання старшокласників контрольних груп (КГ) здійснювалося за традиційною технологією навчання, а експериментальних груп (ЕГ) – за розробленою. Аналіз результатів початкових зрізів засвідчив, що емпіричні розподіл в КГ і ЕГ не відрізняються, а отже, групи були однорідні. Порівняння результатів контрольних зрізів в ЕГ і КГ показало, що емпіричні розподіли стали відрізнятися після впровадження експериментальної технології. У ЕГ кількість десятикласників, що мають творчий рівень розвитку математичних здібностей зросла на 2%, одинадцятикласників – на 3%, високий рівень розвитку – на 5% і 4% відповідно і достатній рівень – на 4% і 11% відповідно (рис. 8, рис. 9).

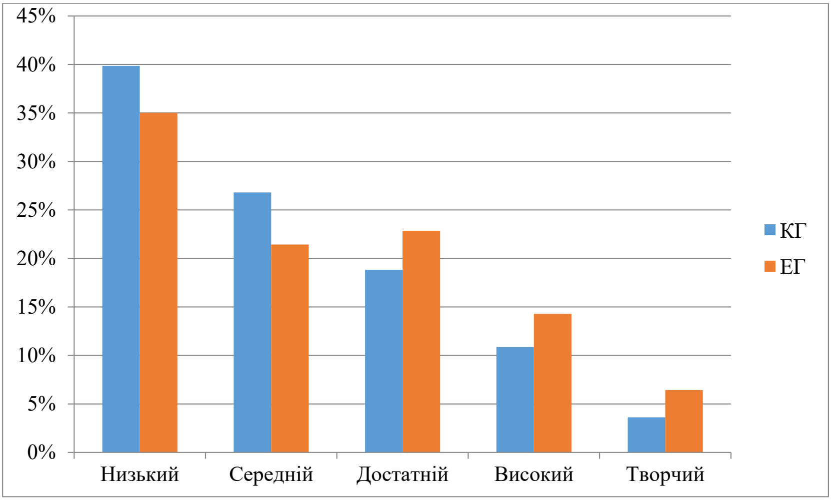

Рис. 8. Рівні розвитку математичних здібностей десятикласників

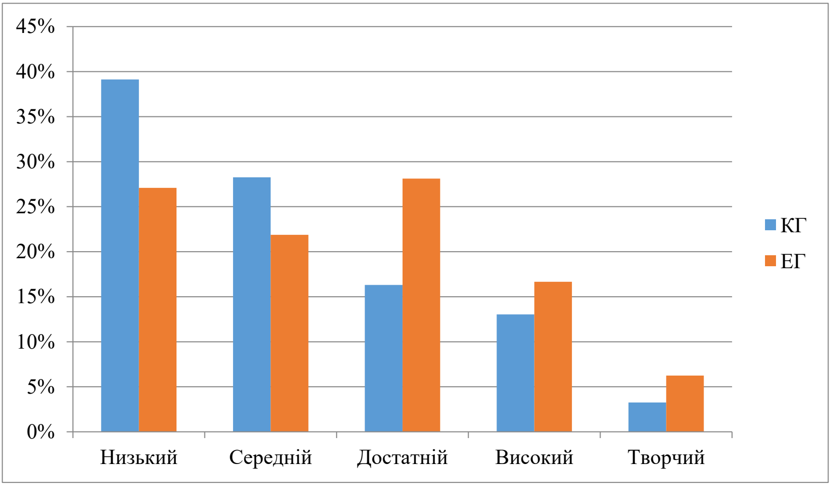

Рис. 9. Рівні розвитку математичних здібностей одинадцятикласників

Загальна кількість учнів із середнім рівнем розвитку математичних здібностей навпаки зменшилася. У десятих класах кількість старшокласників, що мають середній рівень математичних здібностей зменшилась на 5%, в одинадцятих класах на 6%, а кількість учнів, що мають низький рівень зменшилася на 4% та 12% відповідно.

Простежується позитивна динаміка розвитку математичних здібностей у ЕГ старшокласників упродовж двох років навчання (рис. 10, рис. 11).

Примітно, що найбільший ефект від упровадження розробленої технології спостерігався в одинадцятих класах, на другому році експериментального навчання. Такий феномен, на наш погляд, пояснюється існуванням латентного адаптаційного періоду, а також потребою у виборі професії, підготовкою до зовнішнього незалежного оцінювання з математики в умовах запровадження інноваційної технології навчання.

Опісля завершення педагогічного експерименту використано методи математичної статистики: λ -критерій Колмогорова-Смирнова

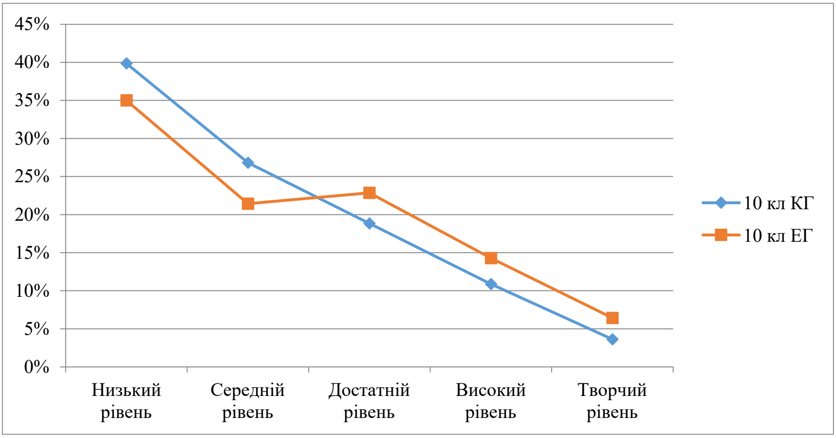

Рис. 10. Динаміка математичних здібностей десятикласників

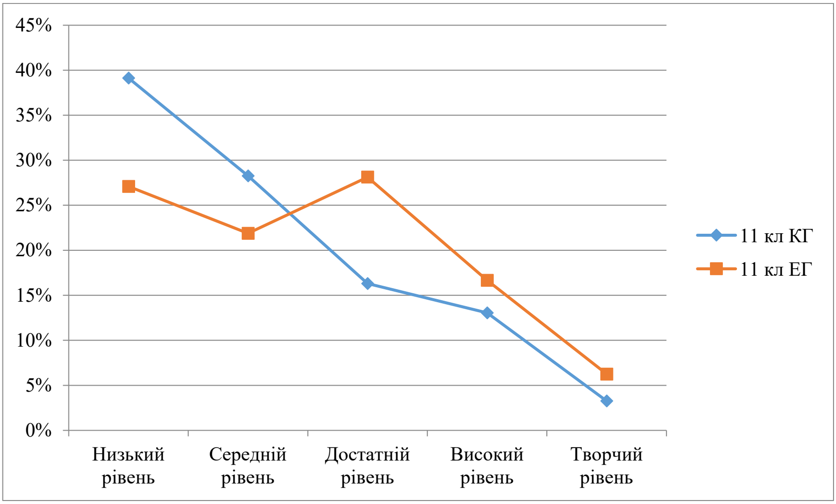

Рис. 11. Динаміка математичних здібностей одинадцятикласників

та ϕ-кутове перетворення Фішера. Перший метод дозволив відшукати точку, в якій сума накопиченої розбіжності між розподілами в ЕГ і КГ старшокласників є найбільшою, а також оцінити достовірність розбіжності. Інший метод – оцінити достовірність розбіжностей між відсотковими частками в ЕГ і КГ.

Сформулюємо дві альтернативні гіпотези: H_0 – емпіричні розподіли розвитку математичних здібностей в КГ не відрізняється від емпіричних розподілів в ЕГ; H_1 – емпіричні розподіли розвитку математичних здібностей в КГ відрізняється від емпіричних розподілів в ЕГ.

За результатами розрахунку λ-критерію маємо $d_{\max} = 0,136$ (таблиця 6).

Таблиця 6

Розрахунок λ-критерію для зіставлення емпіричних розподілів у ЕГ і КГ

Рівні розвитку	**Емпіричні частоти**		**Емпіричні відносні частоти**		**Накопичені емпіричні відносні частоти**		**d= ∑f*e-∑ f*k**
	fe	**fk**	**f*e**	**f*k**	**∑ f*e**	**∑ f*k**	
Низький	75	91	0,318	0,396	0,318	0,396	0,078
Середній	51	63	0,216	0,274	0,534	0,670	**0,136**
Достатній	59	41	0,250	0,178	0,784	0,848	0,064
Високий	36	27	0,153	0,117	0,936	0,965	0,029
Творчий	15	8	0,064	0,035	1,000	1,000	0,000
Усього	236	230	1,000	1,000			

Підраховуємо значення λ-критерію за формулою:

$$\lambda = d_{\max} \times \sqrt{\frac{n_e \times n_k}{n_e + n_k}} = 1,47.$$

Отримане значення λ відповідає статистичній значимості $\rho = 0,02$. Оскільки $\lambda > \lambda_{0,05}$, то розбіжності між емпіричними розподілами в КГ і ЕГ достовірні. Тому приймається гіпотеза H_1.

Оцінимо достовірність розбіжностей між відсотковими частками за допомогою ϕ-кутового перетворення Фішера. Результати розрахунків показують, що максимальна різниця між накопиченими емпіричними частотами була виявлена на середньому рівні розвитку. Верхню межу цієї категорії використаємо як критерій для розподілу обох вибірок на підгрупи, де «є ефект» (творчий, високий і достатній рівні) та «ефекту немає» (низький і середній рівні). Складемо таблицю (таблиця 7).

Таблиця 7

Розрахунок ϕ-кутового перетворення Фішера для оцінки достовірності розбіжностей у ЕГ і КГ

	Є ефект		Ефекту немає		Усього досліджуваних
	Кількість досліджуваних	%	Кількість досліджуваних	%	
ЕГ	110	46,6%	126	53,4%	236
КГ	76	33,0%	154	67,0%	230
	186		280		466

Визначаємо величини ϕ_1 та ϕ_2 , які відповідають відсотковим часткам кожної групи: $\varphi_1\left(46,6\%\right)=1,503$, $\varphi_2\left(33,0\%\right)=1,224$.

Визначаємо емпіричне значення ϕ -критерію:

$$\phi_{емп}=\left(\phi_1-\phi_2\right)\times\sqrt{\frac{n_1\times n_2}{n_1+n_2}}=3,01,$$

де ϕ_1 – кут, що відповідає більшій відсотковій частці;
ϕ_2 – кут, що відповідає меншій відсотковій частці;
n_1 – кількість досліджуваних у ЕГ;
n_2 – кількість досліджуваних у КГ.

Критичні значення $\phi_{емп}$, які відповідають прийнятим у психолого-педагогічних дослідженнях рівням статистичної значимості, такі:

$$\phi_{кр}=\begin{cases}1,64\ (p\leq 0,05)\\ 2,31\ (p\leq 0,01).\end{cases}$$

Одержані емпіричні значення знаходяться в зоні значимості $\varphi^*_{\text{åìï}} > \varphi^*_{\text{ð}}$, тому розбіжності між відсотковими частками достовірні. Отже, гіпотеза H_0 відхиляється, а приймається гіпотеза H_1: відсоток старшокласників, які мають кращі показники розвитку математичних здібностей більший в ЕГ.

Упровадження інноваційної технології навчання дає такі результати:

1. У старшокласників ЕГ більшою мірою розвинений навчально-пізнавальний інтерес до вивчення математики, системотвірний компонент їхніх математичних здібностей слугує успішнішій навчально-математичній діяльності.

2. Порівняно з КГ старшокласники ЕГ чіткіше розрізняють поняття та відношення, краще володіють теоретичними поняттями (формулюють означення), називають основні теореми та їх методи доведення, виділяють основні типи задач і називають методи (способи) їх розв'язання, складають узагальнені способи дій (алгоритми) для реалізації в типових задачних ситуаціях. Названі характеристики засвідчують про позитивну динаміку когнітивно-узагальнювального компонента математичних здібностей здобувачів освіти.

3. Старшокласники ЕГ краще володіють методом математичного моделювання, вміліше розв'язують прикладні задачі з математики. Порівняно з КГ вони краще будують математичні інтерпретації задачних ситуацій (функції, рівняння, нерівності, їх системи та сукупності), реалізовують математичні моделі. Це досягається завдяки якості кодувально-формалізованого компонента математичних здібностей.

4. У старшокласників ЕГ групи спостерігається більш розвинена пам'ять на типові відношення (формули), загальні схеми міркувань (алгоритми), зміст і структуру методів і способів розв'язування задач (доведення і дослідження). Названі якісні характеристики свідчать про краще розвинений мнемічно-узагальнювальний компонент математичних здібностей здобувачів освіти.

5. Задачі математичних олімпіад краще розв'язують старшокласники ЕГ. Тут збільшилася кількість учнів, які самостійно знаходять способи дій у нетипових задачних ситуаціях, цілісно «схоплюють» провідну математичну ідею. Навчально-математична діяльність старшокласників творчого рівня розвитку математичних здібностей супроводжується ага-переживаннями та має ознаки евристичності.

6. Обнулився відсоток респондентів із передбазовою зоною актуального математичного розвитку. Позитивні зміни простежуються в базовій зоні актуального математичного розвитку, вона розширилася до навчальної. Отож зростає відсоток здобувачів освіти з навчально-теоретичною зоною найближчого математичного розвитку.

4. Висновки

Підсумовуючи результати дослідження, формулюємо такі висновки:

1. На часі саєнтифікація математичної освіти в розрізі змісту, проявів, структури та факторів розвитку математичних здібностей як іманентного атрибуту математичної компетентності здобувачів освіти, домінанти її особистісно-психологічного виміру. Дотепер затребуваною в освітній практиці є науково обґрунтована технологія розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

2. Математичні здібності утворюють підсистему в цілісній структурі здібностей особистості, засвідчують її унікальність, уможливлюють ефективну, проникливу та фундаментальну математичну освіту. Розвиток таких здібностей досягається завдяки актуалізації зовнішніх проявів математичної компетентності в навчально-математичній діяльності (процес інтеріоризації).

3. Установлено існування складних кореляційних зв'язків структурних компонентів математичних здібностей (системотвірного, кодувально-формалізованого, когнітивно-узагальнювального, мнемічно-узагальнювального) із вимірами зовнішнього прояву математичної компетентності (змістово-теоретичним, процесуально-діяльним, особистісно-психологічним).

4. За результатами пілотного дослідження з’ясовано, що розвиток математичних здібностей має забезпечуватися на етапі підготовки кваліфікованих педагогічних кадрів. Рівні розвитку математичних здібностей першокурсників і випускників спеціальності 014 Середня освіта (математика) практично однакові. У першокурсників переважає низький рівень розвитку математичних здібностей, водночас спостерігається незначна позитивна динаміка їх розвитку у випускників. Отож проблема розвитку названого особистісного утворення в чинних системах математичної і професійно-педагогічної освіти має системний і комплексний характер.

5. Запровадження розвивально-задачного методу навчання математики, в основі якого положення про актуалізацію зовнішніх вимірів математичної компетентності в навчально-математичній діяльності, принцип розвивальної наступності задач, логіка сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), моделювання (математичне, навчальне, навчально-теоретичне) та рефлексія процесу

учіння математики, слугує розвитку математичних здібностей здобувачів освіти.

6. Учення про зони найближчого математичного розвитку розкриває їх зміст, засноване на процесах інтеріоризації й екстеріоризації та висвітлює цикл розвивального навчання математики. Структурно-функціональні особливості зон найближчого математичного розвитку репрезентує принцип розвивальної наступності навчання математики та задачна структура навчально-математичної діяльності. Відповідно до рівнів змістового узагальнення задачної системи навчання математики виокремлено чотири зони найближчого математичного розвитку здобувачів освіти: базова, навчальна, навчально-теоретична і навчально-дослідницька.

7. Теоретико-ймовірнісна методична модель розвитку математичних здібностей є системою, яка, з одного боку, окреслює сутнісні зв'язки досліджуваного феномена, розкриває його структуру й феноменологічні характеристики, а з іншого боку – репрезентує ймовірнісні чинники та вказує як саме, в який спосіб досягається повноцінне (цілісне) його функціонування. Вона розкриває етапи навчання, визначає типи задач для розв'язування, висвітлює актуалізовані компоненти математичних здібностей та передбачає рефлексію кожного етапу навчального пізнання.

8. Розроблена технологія розвивального навчання математики впроваджується за такою етапністю: визначення зон актуального математичного розвитку; створення зон найближчого математичного розвитку; перетворення зон найближчого математичного розвитку в зони актуального математичного розвитку; проектування зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти. Важливим атрибутом цієї технології є матриця відповідності зон актуального математичного розвитку та зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти.

9. Верифікація створених моделей, упровадження розроблених технологій в ході експериментального навчання математики дозволяють стверджувати про розвивальний ефект, про досягнення розвивальної функції освіти. Позитивних змін зазнають усі структурні компоненти математичних здібностей здобувачів освіти: системотвірний, кодувально-формалізований, когнітивно-узагальнювальний, мнемічно-узагальнювальний.

10. Аналіз результатів упровадження розроблених інноваційних технологій, підсумки педагогічного експерименту дозволили дійти висновку про можливість вирішення суперечностей сучасної математичної освіти, що пов'язані логікою навчального пізнання, асоціативно-рефлекторною теорією научіння, усталеною технологією навчання математики, які передбачають домінування емпіричних узагальнень і актуалізацію емпіричного мислення, нівелювання математичних здібностей і нехтування дуальною природою математичної компетентності.

Гострий соціальний запит на компетентнісно орієнтовану технологію навчання математики, потреба в обґрунтуванні методичних засад реалізації задачного підходу до розвитку математичної компетентності здобувачів освіти зумовлюють перспективи подальших досліджень.

Список літератури:

1. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету.* 2014. № 1. С. 35–39.

2. Клєопа І. А., Петрук В. А. Поняття «математична компетентність майбутніх фахівців комп'ютерної інженерії» в контексті компетентнісного підходу. URL: https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/30840/65234.pdf?sequence=2&isAllowed=y2020

3. Семенець С. Супровідний тригранник математичної компетентності. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки.* 2020. Випуск 2. С. 96–105.

4. Кірман Вадим. Системний аналіз математичної компетентності вчителя географії. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: педагогіка.* 2020. №1. С. 41–51.

5. Шустова Н. Ю. Математична компетентність вчителя молодшої школи як передумова його фахової компетентності. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology,* 2014. *II(18).* Issue: 37. URL: www.seanewdim.co

6. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології.* 2009. № 2. С. 165–174.

7. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.

8. Тарасенкова Н. А. Компетенізація математичної освіти: сутність та етапи реалізації. *Проблеми математичної освіти (ПМО-2017): матеріали міжнар. наук.-метод. конф. (Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р.). Черкаси : ФП Гордієнко Є.І.,* 2017. С. 16–17.

9. Скрипченко О. В., Падалка О. С., Скрипченко О. Л. Психолого-педагогічні основи навчання: навчальний посібник. Київ: Український центр духовної культури, 2003. 328 с.

10. Музика О. Л. Суб'єктно-ціннісний аналіз розвитку творчої особистості. Здібності, творчість, обдарованість: теорія, методика, результати досліджень / за ред В. О. Моляко, О. Л. Музики. Житомир : Рута, 2006. С. 42–45.

11. Рибалка В. В. Психологія розвитку творчої особистості: монографія. Київ : Вища школа, 1996. 362 с.

12. Lee D. M. A study of specific ability and attainment in mathevatics. „British journal of educational psychology", vol. XXV, part 3, 1955.

13. Werdelin I. The mathematical ability experimental and factorial studies. Copengagen, 1958.

14. Rogers A. L. Experimental tests mathematiral ability and their prognostic value. Teacher's college, Columbia University, „Contributions to education". New York, 1918, No. 89.

15. Thorndike E. L. The psychology of algebra. New York, 1928.

16. Семенець С. П. Методологія і теорія розвивального навчання математики: *монографія.* Житомир : О. О. Євенок, 2015. 236 с.

17. Attila Szabo. Mathematical abilities and mathematical memory during problem solving and some aspects of mathematics education for gifted pupils. Academic dissertation of the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics Education at Stockholm University to be publicly defended on Friday 10 November 2017 at 10.00 in Hőgbomsalen, Geovetenskapens hus, Svante Arrhenius văg 12. URL: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1143981/FULLTEXT01.pdf

18. Masooma Ali Al-Mutawah, Abdulla Eid, Ruby Thomas, Enaz Yousef Mahmoud, Moosa Jaafar Fateel. Analysing Mathematical Abilities of High School Graduates. Sustainability and Resilience Conference: Mitigating Risks and Emergency Planning – Social Sciences Track. 2018. P. 26–41. URL: https://knepublishing.com/index.php/KnE-Social/article/view/3101/6544

19. Чугунова О.В. Психолого-педагогічні умови розвитку математичних здібностей старшокласників. *Фізико-математична освіта*. 2018. Випуск 3(17). С. 99–103.

20. Масюк О. Р. Розвиток математичних здібностей учнів у новій українській школі. *Новий колегіум*. 2019. №1. С. 34–38. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NovKol_2019_1_9

21. Семенець С. Дуальна природа математичної компетентності: тривимірна структура зовнішнього прояву. *Актуальні питання гуманітарних наук: міжвузівський збірник наукових праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка*. 2020. Випуск 27. С. 77–85.

22. Психология и педагогика: на рубеже веков: монография [в 2 кн.]. Кн. 1 / Н. К. Карпова, С. А. Васильева, М. С. Головань [и др.]. Одесса : Куприенко СВ, 2015. 176 с.

23. Дусавицкий А. К. Развивающее образование. Основные принципы. Харьков : ХНУ. 1996. 187 с.

24. Дусавицкий А. К. Педагогическая деятельность в развивающем образовании. Восхождение к личности: [учеб. пособие]. Харьков : Изд. Центр Харьковского национального ун-та им. В.Н. Каразина, 2006. 200 с.

25. Achkan V V, Vlasenko K V, Chumak O O, Sitak I V and Kovalenko D A Model of learning the online course "Creative Thinking through Learning Elementary Maths". XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*. 2022. P. 1-12. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012020. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012020

26. Adnan S, Dwi Juniati and Raden Sulaiman Student's Mathematical Representation in Solving Geometry Problems Based on Cognitive Style. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC). *Journal of Physics: Conference Series 1417*. 2019. P. 1-8. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012049. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012049Citation S

27. Cahyani L, Masriyah E and Budi Rahaju Students' reflective abstraction of middle school in reconstructing quadratic equation concept based on high mathematical ability. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC*). Journal of Physics: Conference Series 1417*. 2019. P. 1-5. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012044. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012044

28. Universidad Francisco de Paula Santander, Ocaña, Colombia. C L Garcia Quintero and C M Durán Chinchilla Level of development of mathematical logical thinking in the students of the agricultural areas of the Universidad Francisco de Paula Santander, Ocaña, Colombia. III International Meeting of Mathematical Education. *Journal of Physics: Conference Series 1408*. 2019. P. 1-5. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012013. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012013

29. Hrynevych L M, Khoruzha L L and Proshkin V V Improving the quality of mathematical education of pupils: diagnostics and analytics. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*. 2022. P. 1-10. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012022. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012022

30. Lovianova I V, Kaluhin R Yu, Kovalenko D A, Rovenska O G and Krasnoshchok A V Development of logical thinking of high school students through a problem-based approach to teaching mathematics. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288.* 2022. P. 1-19. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012021. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012021

31. Niño Villan, Gallardo Pérez H J and Villamizar Jaimes Strengthening mathematical interpretation competence through the portfolio as a learning tool. III International Meeting of Mathematical Education, *Journal of Physics: Conference Series 1408.* 2019. P. 1-7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012022. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012022

32. Palengka I, Juniati D and Creative Abadi Mathematical Reasoning of Prospective Teachers in Solving Problems Reviewed Based on Working Memory Capacity. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC). *Journal of Physics: Conference Series 1417*. 2019. P. 1-7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012055. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012055

33. Santiago Carrillo M C, Vergel Ortega M and Rojas Suarez J P Mathematics, resilience and development of thinking of youth. III International Meeting of Mathematical Education. *Journal of Physics: Conference Series 1408*. 2019. P. 1-6. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012012. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012012

34. Vlasenko K V, Lovianova I V, Armash T S, Sitak I V and Kovalenko D A A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. XIII International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 1946.* 2021. P. 1-16. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1946/1/012003

35. Semenets S P, Semenets L M, Andriichuk N M and Lutsyk O M Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*. 2022. P. 1-15. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012023

36. S P Semenets, L M Semenets, N M Andriichuk, O V Chugunova and O M Lutsyk Studies about zones of proximal mathematical development and methods of developmental teaching of mathematics. XV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education (ICon-MaSTEd 2023). *Journal of Physics: Conference Series 2611.* 2023. P. 1-16. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2611/1/012004. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2611/1/012004

37. Великий тлумачний словник української мови [уклад. і гол. ред. В. Г. Бусел]. Київ–Ірпінь : Перун, 2003. 1440 с.

38. Методика навчання і наукових досліджень у вищій школі: навчальний посібник / за ред. С. У. Гончаренка, П. М. Олійника. Київ : Вища школа, 2003. 323 с.

39. Педагогічний словник / за ред. М. Д. Ярмаченка. Київ : Педагогічна думка, 2001. 323 с.

40. Офіційний сайт програми GeoGebra: електронний ресурс. URL: https://www.geogebra.org/calculator

References:

1. Holovan M. S. (2014) Matematychna kompetentnist: sutnist ta struktura [Mathematical competence: essence and structure]. *Naukovyi visnyk Skhidnoievropeiskoho natsionalnoho universytetu,* no 1. pp. 35–39. [in Ukrainian]

2. Klieopa I. A., Petruk V. A. (2020) Poniattia «matematychna kompetentnist maibutnikh fakhivtsiv kompiuternoi inzhenerii» v konteksti kompetentnisnoho pidkhodu [The concept of "mathematical competence of future computer engineering specialists" in the context of the competence approach]. Available at: https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/30840/65234.pdf?sequence=2&isAllowed=y [in Ukrainian]

3. Semenets S. (2020) Suprovidnyi tryhrannyk matematychnoi kompetentnosti [Accompanying trihedron of mathematical competence]. *Naukovi zapysky Berdianskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky*, vol. 2, pp. 96–105. [in Ukrainian]

4. Kirman Vadym (2020) Systemnyi analiz matematychnoi kompetentnosti vchytelia heohrafii [A systematic analysis of the mathematical competence of a geography teacher]. *Naukovi zapysky Ternopilskoho natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni Volodymyra Hnatiuka. Seriia: pedahohika.* no 1. pp. 41–51. [in Ukrainian]

5. Shustova N. Yu. (2014) Matematychna kompetentnist vchytelia molodshoi shkoly yak peredumova yoho fakhovoi kompetentnosti [Mathematical competence of a junior school teacher as a prerequisite for his professional competence]. [in Ukrainian]. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, vol. 37, www.seanewdim.co

6. Zinenko I. M. (2009) Vyznachennia struktury matematychnoi kompetentnosti uchniv starshoho shkilnoho viku [Determination of the structure of mathematical competence of high school students]. Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii. no 2. pp. 165–174. [in Ukrainian]

7. Rakov S. A. (2005) Matematychna osvita: kompetentnisnyi pidkhid z vykorystanniam IKT: monohrafiia [Mathematical education: a competent approach using ICT: monohrafiia]. Kharkiv: Fakt, 360 p. [in Ukrainian]

8. Tarasenkova N. A. (2017) Kompetenizatsiia matematychnoi osvity: sutnist ta etapy realizatsii [Competence of mathematics education: essence and stages of implementation]. Problemy matematychnoi osvity (PMO-2017): materialy mizhnar. nauk.-metod. konf. (Cherkasy, October 26nd–28rd, 2015). Cherkasy: FP Hordiienko Ye.I., pp. 16–17. [in Ukrainian]

9. Skrypchenko O. V., Padalka O. S., Skrypchenko O. L. (2003) Psykholoho-pedahohichni osnovy navchannia: navchalnyi posibnyk [Psychological and pedagogical foundations of learning: study guide]. Kyiv: Ukrainskyi tsentr dukhovnoi kultury, 328 p. [in Ukrainian]

10. Muzyka O. L. (2006) Subiektno-tsinnisnyi analiz rozvytku tvorchoi osobystosti. Zdibnosti, tvorchist, obdarovanist: teoriia, metodyka, rezultaty doslidzhen [Subject-value analysis of the development of a creative personality. Abilities, creativity, giftedness: theory, methodology, research results] / za red. V. O. Moliako, O. L. Muzyky. Zhytomyr: Ruta, pp. 42–45. [in Ukrainian]

11. Rybalka V. V. (1996) Psykholohiia rozvytku tvorchoi osobystosti: monohrafiia [Psychology of creative personality development: monograph]. Kyiv: Vyshcha shkola, 362 p. [in Ukrainian]

12. Lee D. M. A study of specific ability and attainment in mathevatics. *„British journal of educational psychology”,* vol. XXV, part 3, 1955.

13. Werdelin I. The mathematical ability experimental and factorial studies. Copengagen, 1958.

14. Rogers A. L. Experimental tests mathematiral ability and their prognostic value. Teacher’s college, Columbia University, „Contributions to education”. New York, 1918, No. 89.

15. Thorndike E. L. The psychology of algebra. New York, 1928.

16. Semenets S. P. (2015) Metodolohiia i teoriia rozvyvalnoho navchannia matematyky: monohrafiia [Methodology and theory of developmental teaching of mathematics: monograph]. Zhytomyr : O. O. Yevenok, 236 p. [in Ukrainian]

17. Attila Szabo. Mathematical abilities and mathematical memory during problem solving and some aspects of mathematics education for gifted pupils. Academic dissertation of the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics Education at Stockholm University to be publicly defended on Friday 10 November 2017 at 10.00 in Hṏgbomsalen, Geovetenskapens hus, Svante Arrhenius văg 12. Available at: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1143981/FULLTEXT01.pdf

18. Masooma Ali Al-Mutawah, Abdulla Eid, Ruby Thomas, Enaz Yousef Mahmoud, Moosa Jaafar Fateel (2018) Analysing Mathematical Abilities of High School Graduates. Sustainability and Resilience Conference: Mitigating Risks and Emergency Planning – Social Sciences Track, pp. 26–41. Available at: https://knepublishing.com/index.php/KnE-Social/article/view/3101/6544

19. Chuhunova O. V. (2018) Psykholoho-pedahohichni umovy rozvytku matematychnykh zdibnostei starshoklasnykiv [Psychological and pedagogical conditions for the development of mathematical abilities of high school students]. *Fizyko-matematychna osvita*, vol. 3(17), pp. 99–103. [in Ukrainian]

20. Masiuk O. R. (2019) Rozvytok matematychnykh zdibnostei uchniv u novii ukrainskii shkoli [Development of students' mathematical abilities in the new Ukrainian school]. *Novyi kolehium*, no 1. pp. 34–38. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NovKol_2019_1_9 [in Ukrainian]

21. Semenets S. (2020) Dualna pryroda matematychnoi kompetentnosti: tryvymirna struktura zovnishnoho proiavu [The dual nature of mathematical competence: the three-dimensional structure of external manifestation]. *Aktualni pytannia humanitarnykh nauk: mizhvuzivskyi zbirnyk naukovykh prats molodykh vchenykh Drohobytskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Ivana Franka*, vol. 27, pp. 77–85. [in Ukrainian]

22. Psykholohiia i pedahohika: na rubezhi vikiv: monohrafiia (2015) [Psychology and pedagogy: at the turn of the century: monograph]. [v 2 kn.]. Kn. 1 / N. K. Karpova, S. A. Vasyleva, M. S. Holovan [y dr.]. Odessa: Kupryenko SV, 176 p. [in Ukrainian]

23. Dusavytskyi A. K. (1996) Rozvyvalna osvita. Osnovni pryntsypy [Developmental education. Basic principles]. Kharkov: KhNU, 187 p. [in Ukrainian]

24. Dusavytskyi A. K. (2006) Pedahohycheskaia deiatelnost v razvyvaiushchem obrazovanyy. Voskhozhdenye k lychnosty: ucheb. posobye [Pedagogical activity

in developmental education. Ascent to personality: a study guide] Kharkov: Yzd. Tsentr Kharkovskoho natsyonalnoho un-ta ym. V.N. Karazyna, 200 p.

25. Achkan V.V., Vlasenko K.V., Chumak O.O., Sitak I.V. and Kovalenko D.A. (2022) Model of learning the online course “Creative Thinking through Learning Elementary Maths”. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*, pp. 1-12. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012020. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012020

26. Adnan S, Dwi Juniati and Raden Sulaiman (2019) Student's Mathematical Representation in Solving Geometry Problems Based on Cognitive Style. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC). *Journal of Physics: Conference Series 1417,* pp. 1-8 Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012049Citation S

27. Cahyani L., Masriyah E. and Budi Rahaju (2019) Students' reflective abstraction of middle school in reconstructing quadratic equation concept based on high mathematical ability. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC*). Journal of Physics: Conference Series 1417*, pp. 1-5. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012044. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012044

28. Universidad Francisco de Paula Santander, Ocaña, Colombia. C.L. Garcia Quintero and C.M. Durán Chinchilla (2019) Level of development of mathematical logical thinking in the students of the agricultural areas of the Universidad Francisco de Paula Santander, Ocaña, Colombia. III International Meeting of Mathematical Education. *Journal of Physics: Conference Series 1408*, pp. 1-5. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012013. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012013

29. Hrynevych L.M., Khoruzha L.L. and Proshkin V.V. (2022) Improving the quality of mathematical education of pupils: diagnostics and analytics. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*, pp. 1-10. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012022. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012022

30. Lovianova I.V., Kaluhin R.Yu., Kovalenko D.A., Rovenska O.G. and Krasnoshchok A.V. (2022) Development of logical thinking of high school students through a problem-based approach to teaching mathematics. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288,* pp. 1-19. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012021. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012021

31. Niño Villan, Gallardo Pérez H J and Villamizar Jaimes (2019) Strengthening mathematical interpretation competence through the portfolio as a learning tool. III International Meeting of Mathematical Education, *Journal of Physics: Conference Series 1408,* pp. 1-7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012022. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012022

32. Palengka I., Juniati D. and Creative Abadi (2019) Mathematical Reasoning of Prospective Teachers in Solving Problems Reviewed Based on Working Memory Capacity. Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC). *Journal of Physics: Conference Series 1417*, pp. 1-7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012055. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1417/1/012055

33. Santiago Carrillo M.C., Vergel Ortega M. and Rojas Suarez J.P. (2019) Mathematics, resilience and development of thinking of youth. III International Meeting of Mathematical Education. *Journal of Physics: Conference Series 1408*, pp. 1-6. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1408/1/012012. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1408/1/012012

34. Vlasenko K.V., Lovianova I.V., Armash T S, Sitak I.V. and Kovalenko D.A. (2021) A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. XIII International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 1946,* pp. 1-16. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1946/1/012003

35. Semenets S.P., Semenets L.M., Andriichuk N.M. and Lutsyk O.M. (2022) Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. *Journal of Physics: Conference Series 2288*, pp. 1-15. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012023

36. Semenets S.P., Semenets L.M., Andriichuk N.M., Chugunova O.V. and Lutsyk O.M. (2023) Studies about zones of proximal mathematical development and methods of developmental teaching of mathematics. XV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education (ICon-MaSTEd 2023). *Journal of Physics: Conference Series 2611,* pp. 1-16. DOI: https://doi.org/ 10.1088/1742-6596/2611/1/012004. Available at: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2611/1/012004

37. Velykyi tlumachnyi slovnyk ukrainskoi movy (2003) [A large explanatory dictionary of the Ukrainian language]. / uklad. i hol. red. V. H. Busel. Kyiv-Irpin: Perun, 1440 p. [in Ukrainian]

38. Metodyka navchannia i naukovykh doslidzhen u vyshchii shkoli: navchalnyi posibnyk (2003) [Methodology of teaching and scientific research in higher education: study guide] / za red. S. U. Honcharenka, P. M. Oliinyka. Kyiv: Vyshcha shkola, 323 p. [in Ukrainian]

39. Pedahohichnyi slovnyk (2001) [Pedagogical dictionary] / za red. M. D. Yarmachenka – K.: Pedahohichna dumka, 323 p. [in Ukrainian]

40. Ofitsiinyi sait prohramy GeoGebra [The official site of the GeoGebra program]. Available at: https://www.geogebra.org/calculator