

UDC 519.6+004.02

DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-106-0-4>

**ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ  
“МЕТОДИ ГЛОБАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ”  
ЗДОБУВАЧАМ НАУКОВОГО СТУПЕНЯ PHD  
ГРУПИ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ “ТЕХНІЧНІ НАУКИ”**

**FEATURES OF STUDYING THE TOPIC  
“GLOBAL OPTIMIZATION METHODS”  
FOR GRADUATE STUDENTS OF THE SPECIALTY  
“TECHNICAL ENGINEERING”**



**Tetiana Bilousova**

Senior Lecturer of the Department of  
Management and Information Technology  
Kherson State Agrarian and Economic University  
e-mail: [tbbelousovane@gmail.com](mailto:tbbelousovane@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-6982-8960>



**Volodymyr Savchuk**

Ph.D., Associate Professor,  
Head of the Department of  
Vessel's Power Plants Operation,  
Kherson State Maritime Academy  
e-mail: [postsavchuk@gmail.com](mailto:postsavchuk@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-5266-850>



**Halyna Tuluchenko**

Doctor of Engineering Science, Professor,  
Professor of the Department of  
Higher Mathematics and Mathematical Modelling,  
Kherson National Technical University  
e-mail: [tuluchenko.galina@ukr.net](mailto:tuluchenko.galina@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0002-6196-540X>

**Annotation.** An important component of graduate students training is the acquisition of skills in interpreting problem-solving using modern computer mathematics systems. Obtaining of such skills is impossible without the use of educational tasks that demonstrate not only the advantages of modern mathematical methods, but also their shortcomings and the consequences of violating the conditions of application of these methods.

The purpose of the article is to analyze the methodological features of solving multiparameter optimization problems using Computer Mathematics Systems.

The subject of the research is the problems of multiparameter optimization with such features as polymodal object functions, the presence of asymptotic hyperplanes in the object function, the existence of many equal extrema, and so on.

General scientific methods of analysis, analogy, modeling, abstraction, formalization are used to perform research. When studying the methods of multiparameter optimization in the educational literature, examples of unimodal objective functions are mostly given. This leads to the fact that the shortcomings of optimization methods are ignored. This article presents three examples with different features of object functions. In the first problem, the objective function has 120 equal maxima in the range of admissible values. In the second problem, the graph of the objective function has an asymptotic horizontal plane. Both problems belong to the problems of multiparameter optimization. In the first problem, the objective function depends on 10 arguments. In the second problem, the objective function depends only on two arguments and, accordingly, its visualization is possible. However, the correct solution of both problems requires their theoretical analysis to correctly interpret the results of the approximate optimization methods application. The third of the considered problems is interesting in its analytical solution by the methods of variational calculus leads to a system of algebraic equations that has more than one solution. From the obtained results we choose the point of the global minimum. Approximate methods clearly find the point of the global minimum, because the problem is unimodal. Obviously, when studying the optimization methods, it is advisable to use problems that illustrate the limits of application of these methods. This should help prepare graduate students to independent research.

**Key words:** Nonlinear multiparameter optimization, conditional global optimization, multi-extreme problems.

**Вступ.** Для задач оптимізації, з якими доводиться стикатися здобувачам наукового ступеня PhD групи спеціальностей “Технічні науки” при виконанні дисертаційних досліджень, характерною є висока вимірність та наявність багатьох екстремумів у функції цілі.

Перші методи, орієнтовані на розв’язання багатоекстремальних задач, природним чином пов’язані зі спробами узагальнити методи локальної оптимізації на багатоекстремальний випадок [1]. Ці методи так чи інакше пов’язані з генеруванням вибірки початкових точок локального спуску та

зі схемами відбору серед цих точок більш перспективних. З оглядом цих методів можна ознайомитися в роботі [1, с. 12–15, 154–155].

Сучасні методи розв'язання вказаних задач логічно розділити на дві групи:

- методи, які реалізуються за допомогою мінімаксних алгоритмів;
- методи, які реалізуються за допомогою алгоритмів оптимальних

в середньому на підставі ймовірнісних уявлень про функцію цілі.

Методи другої групи, в свою чергу, діляться на такі, за допомогою яких редукція багатовимірної задачі оптимізації до еквівалентної одновимірної здійснюється шляхом

- розв'язання послідовності рекурсивно зв'язаних одновимірних підзадач [1, с. 155–168];
- застосування розгортки (кривих, що заповнюють простір), які відображають багатовимірну область на відрізок дійсної вісі [1, с. 168–214; 2–3].

У системах комп'ютерної математики реалізовані, головним чином, класичні методи розв'язання багатоекстремальних задач, які використовують генерацію множини початкових точок. Відрізняються ці методи вимогами до неперервності та диференційованості цільової функції та функцій, що входять до опису обмежень [5–7].

Сучасні методи глобальної оптимізації представлені здебільшого програмними модулями, які розробляються авторами цих методів, і не мають широкого кола користувачів.

Таким чином, спостерігається великий розрив між рівнем математичної підготовки з методів оптимізації, який надається на бакалаврському та магістерському рівні здобувачів вищої освіти з інженерних спеціальностей, та необхідним рівнем володіння оптимізаційними методами для їх кваліфікованого застосування при проведенні дисертаційних досліджень.

У даній роботі аналізуються приклади задач глобальної оптимізації, що мають розв'язки, які не завжди можуть бути знайдені відомими наближеними методами.

#### **Методи нелінійної оптимізації математичного процесора Maple.**

Дослідимо працездатність методів умовної оптимізації, які входять до бібліотеки методів нелінійної оптимізації команди **NLPSolve** пакету **Optimization** математичного процесора **Maple**.

Ці методи розроблені фахівцями компанії Numerical Algorithms Group (NAG). Названі методи є ітераційними за своєю природою і вимагають від користувача вибору початкової точки.

Очевидно, що якість розв'язку задачі оптимізації може сильно залежати від здійсненого вибору початкової точки. Для призначення початкової точки

використовується опція **initialpoint**. У разі ігнорування користувачем цієї опції початкова точка генерується автоматично.

Серед методів, які можуть використовуватися при виконанні команди **NLPSolve**, тільки один орієнтований на розв'язання довільних нелінійних задач оптимізації з обмеженнями або без них – **метод послідовного квадратичного програмування**. Метод обирається за допомогою значення параметра **method = sqp**.

У методі використовуються похідні цільової функції, які обчислюються автоматично або явно надані через параметри. Якщо аналітичне обчислення похідних неможливе, тоді обчислюються наближені значення похідних.

Якщо варіант методу користувачем не обраний, тоді метод вибирається командою **NLPSolve** згідно з наступними правилами. Якщо задача оптимізації одновимірна і необмежена, крім кінцевих меж, використовується метод квадратичної інтерполяції. Якщо задача оптимізації необмежена і можливе обчислення градієнту цільової функції, тоді використовується метод **PCG**. В інших випадках використовується метод **SQP**.

У 2011 р з'явився пакет **DirectSearch**, який є сумісним із цією системою **Maple**, в якому реалізований універсальний метод оптимізації **CDOS** (Conjugate Direction with Orthogonal Shift). Метод використовує спряжені напрямки разом з ортогональним зсувом [7].

Метод спеціально розроблений для оптимізаційних задач, в яких цільова функція і обмеження у вигляді нерівностей подаються як "чорні ящики". Цільова функція та функції, які використовуються для опису обмежень, не обов'язково повинні бути диференційованими та неперервними.

Пакет **DirectSearch** містить дві головні функції:

- **Search** – для пошуку локального екстремуму, найближчого до початкової точки;
- **GlobalSearch** – для пошуку глобального екстремуму.

Синтаксис цих команд сумісний з синтаксисом команди **NLPSolve**. За замовчуванням генерується 100 початкових точок. Додатково може бути описана область, в якій генеруються початкові точки.

**Тестування методів глобальної оптимізації CKM Maple.**

Перша з аналізованих задач пропонувалася на 79-ій математичній олімпіаді імені **William Lowell Putnam** у 2018 р. [7].

**Задача 1.** Визначити найбільше можливе значення суми

$$\sum_{i=1}^{10} \cos(3x_i) \tag{1}$$

для дійсних чисел  $x_i$ ,  $i = \overline{1; 10}$ , які задовольняють рівності

$$\sum_{i=1}^{10} \cos x_i = 0. \quad (2)$$

**Розв'язання.**

Спільною частиною всіх способів розв'язання задачі 1 є використання формули косинуса потрійного кута:

$$\cos(3x_i) = 4\cos^3 x_i - 3\cos x_i. \quad (3)$$

Тотожність (3) дозволяє звести задачу умовної оптимізації (1-2) до задачі оптимізації функції:

$$F(y_1; y_2; \dots; y_{10}) = 4 \sum_{i=1}^{10} y_i^3 \rightarrow \max \quad (4)$$

за обмежень

$$g(y_1; y_2; \dots; y_{10}) = \sum_{i=1}^{10} y_i = 0; \\ -1 \leq y_i \leq 1; i = \overline{1; 10}. \quad (5)$$

Оскільки область припустимих значень змінних  $y_i$  є компактом, тому функція (4), очевидно, досягає на ньому свого найбільшого значення.

Вимірність задачі  $n = 10$  суттєво ускладнює застосування класичних методів розв'язання задачі оптимізації, зокрема, методу множників Лагранжа.

**Перший спосіб (аналітичний).** Спосіб розв'язання, що пропонується авторами, є близьким до наведеного в [7], але має певні методичні відмінності, які, на думку авторів, сприяють легшому розумінню алгоритму побудови розв'язку. Звернемо увагу на те, що цільова функція (4) та ліва частина функціонального обмеження (5) є симетричними функціями.

Якщо  $i$ -та координати точки локального екстремуму має значення  $y_i^*$ , тоді номер індексу  $i$  не впливає на значення функції цілі (4) та на виконання функціонального обмеження (5).

Крім того, очевидно, що можливе виконання рівностей:

$$F(\dots; y_i; \dots; y_j; \dots) = F(\dots; y_j; \dots; y_i; \dots); \\ g(\dots; y_i; \dots; y_j; \dots) = g(\dots; y_j; \dots; y_i; \dots). \quad (6)$$

Отже, серед координат точок локальних екстремумів можуть бути повторювані.

Таким чином умовні локальні екстремуми функції (4) можуть мати місце в точках, координати яких складають з трьох груп значень відповідно до узагальненої теореми Вейерштрасса:

$$\begin{aligned}y_1^* &= \dots = y_a^* = 1; \\y_{a+1}^* &= \dots = y_{a+b}^* = -1; \\y_{a+b+1}^* &= \dots = y_{a+b+c}^* = y^*, \\-1 &< y^* < 1; \\a + b + c &= 10; \\a, b, c &\in N \cup \{0\}.\end{aligned}\tag{7}$$

Тоді задача умовної оптимізації (4-5) може бути сформульована так:

$$F(a; b; c; y^*) = 4 \cdot (a - b + c(y^*)^3) \rightarrow \max\tag{8}$$

за обмежень

$$\begin{aligned}g(a; b; c; y^*) &= a - b + cy^* = 0; \\-1 &< y^* < 1; \\a + b + c &= 10; \\a, b, c &\in N \cup \{0\}.\end{aligned}\tag{9}$$

Очевидно, що з усіх локальних максимумів цільової функції (8) більшими є ті, для яких  $b = 0$ , якщо такі існують. Перевіримо існування саме таких локальних максимумів у функції (8). В цьому випадку задача оптимізації набуває вигляду:

$$F(a; c; y^*) = 4 \cdot (a + c(y^*)^3) \rightarrow \max\tag{10}$$

за обмежень

$$\begin{aligned}g(a; c; y^*) &= a + cy^* = 0; \\-1 &< y^* < 1; \\a + c &= 10; \\a, c &\in N \cup \{0\}.\end{aligned}\tag{11}$$

Вимірність задачі знизилась з 10 до 3. Крім того, якщо задача оптимізації (4-5) є задачею неперервної оптимізації за типом параметрів, тоді задача

(10–11) має два параметри, які приймають цілочисельні значення  $(a; c)$  і один параметр  $(y^*)$ , який є неперервним.

Виразимо параметр  $(y^*)$  з функціонального обмеження (11):

$$y^* = -\frac{a}{c} \quad (12)$$

та підставимо отриманий вираз в цільову функцію (10):

$$F(a; c; y^*) = 4 \cdot \left( a + c \left( -\frac{a}{c} \right)^3 \right) = 4a \cdot \left( 1 - \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right) \rightarrow \max . \quad (13)$$

Для фіксованого значення  $a$  функція (13) зростає, коли  $a < c$ . З урахуванням обмеження  $a + c = 10$  можливі такі пари значень  $(a; c)$ :

$$(1; 9); \quad (2; 8); \quad (3; 7); \quad (4; 6).$$

Цим значенням параметрів відповідають значення цільової функції (13):

$$\frac{32}{9}; \quad \frac{15}{2}; \quad \frac{480}{49}; \quad \frac{80}{9}.$$

Очевидно, що найбільшим значенням функції цілі є  $\frac{480}{49}$ .

Це значення досягається в точках, які мають три координати рівні 1 та сім координат, які рівні  $\left(-\frac{3}{7}\right)$ . За формулою перестановок із повтореннями з'ясуємо, що в області припустимих значень параметрів функції цілі таких точок:

$$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

**Другий спосіб (команда NLPsolve).** Оскільки досліджувана задача є багатопараметричною, тому для її розв'язання використаємо синтаксис команди **NLPsolve** у матричній формі:

```
with(optimization):  
N:=10: # Кількість параметрів  
#Формування функції цілі  
ObjectFun:=proc(V)  
local SObjectFun, ii;  
SObjectFun:=4*sum(V[ii],ii=1..N);  
return SObjectFun;
```

**end proc:**

```
#Обчислення вектора градієнта цільової функції
obggrd:=proc(V,W)
local ii;
for ii from 1 to N do
W[ii]:=12* V[ii]^2:
end do:
end proc:
#Формування матриць для опису інтервалів зміни значень
параметрів
A:=Matrix(2*N,N,0,datatype=float) :
for ii from 1 to N do
A[ii,ii]:=1:
A[ii+N,ii]:=-1:
end do:
b:=Vector(2*N,1,datatype=float):

#Формування матриць для опису функціонального обмеження
Aeq:=Matrix(1,N,1,datatype=float) :
beq:=Vector(1,0,datatype=float):

lc:=[A,b,Aeq,beq]:# опис обмежень задачі

MyInitialPoint:=
Vector(N,[1,1,1,-0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5,]):
#координати початкової точки

NLPsolve(N,ObjectFun,lc,
initialpoint=MyInitialPoint,objectivegradient=obj,
maximize);
```

Як і слід очікувати, при початковій точці, яка є близькою до однієї з точок глобального максимуму, значення глобального максимуму знайдено з високою точністю:

$$\max F(y_1; y_2; \dots; y_{10}) \approx 9,7959$$

та встановлені координати точки його локалізації.



За відсутності призначеної початкової точки її координати генеруються випадковим чином. Обчислювальні експерименти показали, що в даній задачі при випадковій початковій точці отримати адекватний розв'язок за прийнятну кількість спроб не вдається, не дивлячись на те, що область припустимих значень містить 120 точок з рівними максимальними значеннями функції цілі в них.

**Третій спосіб (команда GlobalSearch).** Команда GlobalSearch передбачає синтаксис у алгебраїчній формі, яка є громіздкою для даної задачі та інтуїтивно відповідає рукописній нотації, тому наводити програмний код не будемо.

Для обчислювальних експериментів область генерації початкових точок обиралася рівною області варіювання значень параметрів (табл. 1).

**Таблиця 1** – Характеристики роботи команди при розв'язанні задачі оптимізації (4–5)

Кількість початкових точок	$\max F(y_1; y_2; \dots; y_{10})$	Час виконання, с
10	9,72	80
50	9,74	507
100		
(за замовчуванням)	9,76	987

Точність знайдених глобальних максимумів не можна визнати задовільною.

Отже, без теоретичного аналізу задачі знайти її точний розв'язок, а тим більше встановити факт існування 120 точок рівних максимумів, застосованими наближеними методами глобальної оптимізації не виявилось можливим.

**Задача 2** [8, с. 30–32]. Знайти мінімум функції

$$\begin{aligned}
 F(x; y) = & 3 \cdot (1-x)^2 \exp(-x^2 - (y+1)^2) - \\
 & -10 \cdot \left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) \exp(-x^2 - y^2) - \\
 & -\frac{1}{3} \exp(-(x+1)^2 - y^2) \rightarrow \min, \quad (14)
 \end{aligned}$$

якщо  $-3 \leq x \leq 3$ ;  $-3 \leq y \leq 3$ .

### Розв'язання.

У навчальному посібнику [8, с. 30–32] локальні мінімуми функції (14) знаходяться за допомогою функції **fmincon** ППП MATLAB, яка реалізує метод послідовного квадратичного програмування, як і команда **NLPSolve** математичного процесора Maple.

Особливістю функції (14) є те, що її графік за межами певної області асимптотично наближається до площини  $z=0$  (рис. 1). При виконанні наближених обчислень це приводить до встановлення помилкових точок екстремумів.

Обидві команди **NLPSolve** та **Search**, які реалізують різні оптимізаційні методи, як відзначалося вище, при початковій точці  $(-0,5; 3)$  знаходять помилковий мінімум у точці з координатами  $(-3; 3)$  (рис. 3).

Причиною помилки, очевидно, є наближене обчислення похідних при кінцевій розрядній сітці.

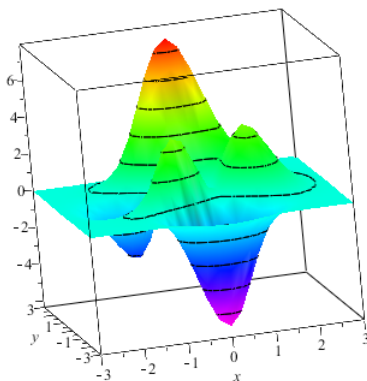


Рисунок 1 - Графік функції (14)

```
> NLPSolve(f, x=-3 ..3, y=-3 ..3, initialpoint = {x=-0.5, y=3});  
[0.0000322353596126927249, [x=-3., y=3.]]  
> Search(f, [x=-3 ..3, y=-3 ..3], initialpoint = {x=-0.5, y=3});  
[0.0000322353797182492, [x=-2.99999992532643, y=2.99999996018065], 43]
```

Рисунок 2 - Результати розв'язання задачі оптимізації (14)

Результатом виконання команди пошуку глобального екстремуму **GlobalSearch** є перелік локальних мінімумів задачі оптимізації (14), які

відсортовані за величиною модулів мінімальних значень функції в точках локальних мінімумів (рис. 3).

```
> GlobalSearch(f, [x=-3..3, y=-3..3]);
```

-6.55113333283584	[x = 0.228278920591274, y = -1.62553495758727]	127
-3.04984940280026	[x = -1.34739624440514, y = 0.204518865994075]	60
-0.0649358682555270	[x = 0.296445553816181, y = 0.320196247694401]	70
0.0000322353699409009	[x = -2.99999999134678, y = 2.99999993466881]	60
0.0000410297282709219	[x = 2.99999999742924, y = 2.99999998936864]	60
0.0000667128596067689	[x = -2.99999999944780, y = -2.99999976957917]	42

**Рисунок 3 – Результати виконання команди пошуку глобального екстремуму GlobalSearch для задачі оптимізації (14)**

Очевидно, що перші три локальні мінімуми є правильними, а інші є помилковими.

**Задача 3.** Знайти найменшу відстань між кривими:

$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 1; \quad (15)$$

$$y = x^2. \quad (16)$$

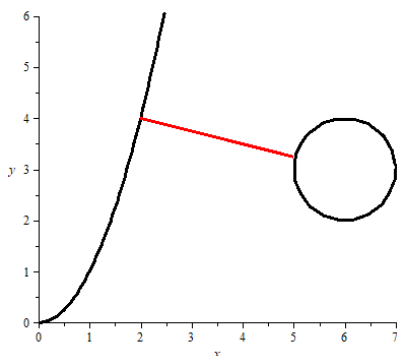
**Розв'язання.**

Формально задача може бути подана як задача оптимізації з чотирма параметрами:

$$F(x_1; y_1; x_2; y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \rightarrow \min \quad (17)$$

$$(x_1 - 6)^2 + (y_1 - 3)^2 = 1; \quad (18)$$

$$y_2 = x_2^2. \quad (19)$$



**Рисунок 3 – Найменша відстань між графіками функцій (15) та (16)**

**Перший спосіб (аналітичний).** Відстань між гладкими кривими може бути знайдена методами варіаційного числення, а саме, знаходженням екстремального значення функціонала [9]:

$$F(x_1; x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx; \quad (20)$$

де  $x_1$  та  $x_2$  належать різним кривим.

Екстремальною кривою для функціонала (20) є пряма  $y = C_1 x + C_2$ . За умовою трансверсальності та перетину екстремальної прямої з заданими кривими маємо:

$$\begin{cases} -\frac{\tilde{x}_1 - 6}{\sqrt{1 - (\tilde{x}_1 - 6)^2}} C_1 = -1; \\ 2\tilde{x}_2 C_1 = -1; \\ C_1 \tilde{x}_1 + C_2 = 3 + \sqrt{1 - (\tilde{x}_1 - 6)^2}; \\ C_1 \tilde{x}_2 + C_2 = \tilde{x}_2^2. \end{cases}$$

Після очевидних перетворень отримуємо:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = 2 \cdot \left( 3 \pm \frac{2}{17} \sqrt{17} \right); \\ \tilde{x}_2 = 2; \\ C_1 = -\frac{1}{4}; \\ C_2 = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

За формулою (20) маємо, що

$$F(x_1; x_2) = \int_2^{2\left(3 + \frac{2}{17}\sqrt{17}\right)} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot \left( 2 \cdot \left( 3 + \frac{2}{17} \sqrt{17} \right) - 2 \right) = \sqrt{17} + 1;$$

$$F(x_1; x_2) = \int_2^{2\left(3 - \frac{2}{17}\sqrt{17}\right)} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot 2 \cdot \left( 3 - \frac{2}{17} \sqrt{17} \right) = \sqrt{17} - 1.$$

Отже, найменша відстань між кривими дорівнює  $\sqrt{17} - 1$ .

**Другий спосіб (команда NLPsolve).** При застосуванні команди NLPsolve з початковою точкою  $\tilde{x}_1 = 5; \tilde{y}_1 = 3; \tilde{x}_2 = 2; \tilde{y}_2 = 4$  після наближених обчислень отримуємо такий розв'язок задачі (17–19):

$$\text{Optimization}\{NLPsolve\}[(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2, [(x1 - 6)^2 + (y1 - 3)^2 = 1, y2 = x2^2], \text{initialpoint} = \{x1 = 5, y1 = 3, x2 = 2, y2 = 4\}]$$

[9.75378874835421784, [x1 = 5.02985756713298, x2 = 1.99999996536376, y1 = 3.24253589441942, y2 = 3.999999986145385]]

**Третій спосіб (команда GlobalSearch).** Команда GlobalSearch знаходить такий же глобальний мінімум.

$$\text{GlobalSearch}[(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2, [(x1 - 6)^2 + (y1 - 3)^2 = 1, y2 = x2^2]];$$

[9.75378673713980 [x1 = 5.0298577559465, x2 = 2.00000030312825, y1 = 3.24253780217965, y2 = 4.00000095882776] 3175]

**Висновки.** При вивченні методів багатопараметричної оптимізації в навчальній літературі здебільшого приводяться приклади унімодальних цільових функцій. Це призводить до того, що поза увагою залишаються недоліки методів оптимізації.

В даній статті наведено три приклади з різними особливостями цільових функцій.

У першій задачі цільова функція має 120 рівних між собою максимумів в області припустимих значень. У другій задачі графік цільової функції має асимптотичну горизонтальну площину. Обидві задачі відносяться до задач багатопараметричної оптимізації. У першій задачі цільова функція залежить від 10 аргументів. У другій задачі цільова функція залежить тільки від двох аргументів і, відповідно, можлива її візуалізація.

Але коректне розв'язання обох задач вимагає проведення їх теоретичного аналізу для правильної інтерпретації результатів застосування наближених методів оптимізації.

Третя з розглянутих задач цікава тим, що її аналітичне розв'язання методами варіаційного числення приводить до системи алгебраїчних рівнянь, яка має більше одного розв'язку. Серед отриманих розв'язків обираємо точку глобального мінімуму. Наближені ж методи однозначно знаходять точку глобального мінімуму, оскільки задача є унімодальною.

Очевидно, що при вивченні здобувачами наукового ступеня PhD оптимізаційних методів доцільним є використання задач, які ілюструють межі застосування названих методів.

Важливою складовою підготовки здобувачів наукового ступеня PhD є набуття ними навичок інтерпретації результатів розв'язання задач за допомогою сучасних систем комп'ютерної математики. Набуття таких навичок

неможливе без використання навчальних задач, які демонструють не тільки переваги сучасних математичних методів, але й їх недоліки та наслідки порушення умов застосування цих методів.

### Список літератури:

1. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М. : Наука, 1978. 240 с.
2. Городецкий С. Ю., Гришагин В. А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.
3. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации : монография. М. : Издательство Московского университета, 2013. 280 с.
4. Лысенко И. В., Бутенко В. О. Анализ возможностей решения задач оптимизации средствами систем компьютерной математики. *Системы обработки інформації*. 2016. Вып. 5 (142). С. 133–136.
5. Бедратюк Л. П., Бедратюк Г. І. Використання системи комп'ютерної алгебри Maple для розв'язання задач оптимізації. *Вісник Хмельницького національного університету*. 2014. № 5. С. 247–252.
6. Моисеев С. Н. Универсальный метод оптимизации без использования производных с квадратичной сходимостью. Воронеж, 2011. 25 с. URL: <http://www.twirpx.com/file/1534928/> (дата звернення: 04.07.2021).
7. The Putnam Archive. URL: <https://kskedlaya.org/putnam-archive/> (дата звернення: 04.07.2021).
8. Маркина М. В., Судакова А. В. Практикум по решению задач оптимизации в пакете MATLAB : учебно-методическое пособие. Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2017. 49 с.
9. Тургунбаев Р. М., Шарипова Л. Д. Об одной занимательной задаче на расстояние между кривыми. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 2 (16). С. 131–136.

### References:

1. Strongin R. G. (1978). *Chislennyye metody v mnogoekstremalnykh zadachah* [Numerical Methods in Multi-Extremal Problems]. M. : PH Nauka. (in Russian)
2. Gorodetskiy S. Yu., Grishagin V. A. (2007). *Nelineynoye programmirovaniye i mnogoekstremalnaya optimizatsiya* [Nonlinear Programming and Multi-Extremal Optimization]. N. Novgorod : PH NNGU. (in Russian)
3. Strongin R. G., Gergel V. P., Grishagin V. A., Barkalov K. A. (2013). *Parallelnyye vychisleniya v zadachah globalnoy optimizatsii* : monografiya [Parallel Computing in Global Optimization Problems : Monograph]. M. : PH Moscow University. (in Russian)

4. Lyisenko I. V., Butenko V. O. (2016). Analiz vozmozhnostey resheniya zadach optimizatsii sredstvami sistem kompyuternoy matematiki [Analysis of the Possibilities of Optimization Problems Solving by Means of Computer Mathematics Systems]. *Information Processing Systems*, issue. 5 (142), pp. 133–136. (in Russian)
5. Bedratiuk L. P., Bedratiuk H. I. (2014). Vykorystannia systemy kompiuternoi alhebry Maple dlia rozviazannia zadach optymizatsii [Using of the Computer Algebra System Maple to Optimization Problems Solving]. *Bulletin of Khmelnytsky National University*, no 5, pp. 247–252. (in Ukrainian)
6. Moiseev S. N. (2011). *Universalnyy metod optimizatsii bez ispolzovaniya proizvodnyih s kvadrachnoy shodimostyu* [Universal Method of Optimization without the Use of Derivatives with Quadratic Convergence]. Voronezh. Available at: <http://www.twirpx.com/file/1534928/> (accessed 04.07.2021) (in Russian)
7. The Putnam Archive. Available at: <https://kskedlaya.org/putnam-archive/> (accessed 04.07.2021)
8. Markina M. B., Sudakova A. V. (2017). *Praktikum po resheniyu zadach optimizatsii v pakete MATLAB : uchebno-metodicheskoe posobie* [Workshop on solving optimization problems in the package MATLAB : textbook]. Nizhniy Novgorod : Nizhegorodskiy University. (in Russian)
9. Turgunbaev R. M., Sharipova L. D. (2018). Ob odnoy zanimatelnoy zadache na rasstoyanie mezhdru krivyimi [One entertaining problem on the distance between curves]. *Physics and Mathematics Education*, issue 2 (16), pp. 131–136. (in Russian)