

МОДЕЛЬ СОЛОУ В ПЕРСПЕКТИВАХ ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ ТА ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

Черевко Є.В.

ВСТУП

Сталий розвиток як концепція, що гармонізує економічне зростання, екологічну стабільність і соціальну справедливість, є центральною парадигмою сучасної економічної науки. У контексті глобальних викликів – зміни клімату, виснаження природних ресурсів, демографічного тиску та зростання нерівності – виникає потреба у теоретичних і емпіричних інструментах для аналізу довгострокових перспектив економічного розвитку. Модель Солоу (Солоу-Свана), розроблена в 1950-х роках, залишається фундаментальною основою для розуміння економічного зростання через взаємодію капіталу, праці та технологічного прогресу. Проте її базова форма, орієнтована на необмежене зростання за умов екзогенного технологічного прогресу, потребує модифікації, щоб врахувати обмеженість природних ресурсів, екологічні екстерналії та соціальні фактори, які є ключовими для сталого розвитку.

Ця робота використовує модель Солоу як теоретичну основу для аналізу економічного зростання в контексті сталого розвитку, адаптуючи її через розширені виробничі функції, які включають природний капітал, енергоефективність і людський капітал. Виробнича функція, як ядро моделі, дозволяє оцінити внесок традиційних факторів виробництва (капіталу та праці), а також дослідити вплив екологічних і соціальних обмежень на економічні результати. Дослідження спрямоване на відповідь на ключові питання: як економіки можуть забезпечити зростання без виснаження природних ресурсів?

Яку роль відіграють зелені технології та людський капітал у досягненні сталого розвитку? Які політичні інструменти сприяють переходу до стійкої економічної моделі?

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю переосмислення традиційних економічних моделей у світлі сучасних викликів. Зміна клімату, втрата біорізноманіття та зростання нерівності вимагають нового підходу до економічного зростання, який би забезпечував добробут нинішніх поколінь, зберігаючи можливості для майбутніх. Модель Солоу, попри обмеження, такі як припущення про екзогенність технологічного прогресу чи ігнорування ринкових невдач, пропонує гнучку основу для інтеграції екологічних і соціальних факторів.

У цій монографії ми розробляємо модифіковану версію моделі, яка враховує природний капітал, екологічну амортизацію та соціальну стабільність, а також аналізуємо її емпіричне застосування на прикладі країн із різними економічними та екологічними стратегіями.

Метою дослідження є створення теоретичного та практичного підходу до економічного зростання, який відповідає принципам сталого розвитку. Ми прагнемо адаптувати модель Солоу до сучасних реалій і запропонувати політичні рекомендації, які сприятимуть зеленій трансформації економік, інвестуванню в людський капітал і збереженню природних ресурсів. Монографія поєднує економічний аналіз із міждисциплінарним підходом, враховуючи екологічні, соціальні та технологічні аспекти, щоб надати комплексне бачення шляхів досягнення сталого розвитку.

Дуже важливо для прибуткової роботи підприємства визначити оптимальне співвідношення між інвестуванням в виробничі фонди та в оплату праці. Також цікаво визначити, яке значення має становити початковий капітал. Стосовно ідеї оптимального співвідношення між інвестуванням в виробничі фонди та в оплату праці, деякі пропозиції були розвинуті, але це робилося виключно з якісних міркувань¹. У іншому випадку автори обмежились лише постановкою задачі у загальному вигляді, та запропонували її розв'язання методом Лагранжа². Невирішеною часткою проблеми лишилися остаточні вирази для оптимальної фондоозброєності для конкретних виробничих функцій. Крім того, цікавим є питання визначення стартового капіталу для створення підприємства. Для отримання кількісних виразів будемо використовувати властивості неокласичних виробничих функцій – Кобба-Дугласа та функції із сталою еластичністю заміщення (CES), та математичний апарат диференціального числення.

Проблеми розвитку, прогнозування економічного зростання чи спадання, завжди цікавило економістів³. Крім того, економічні тенденції вивчаються на протязі малих проміжків часу (8–10 років), тобто, коли суттєво помітні циклічні процеси в економіці. Для більш глобального дослідження успішно використовують так звану, динамічну модель Солоу.

Потужним інструментом економічного дослідження є виробничі функції. Деякі дослідники, виходячи з фізичних аналогій, вважають, що

¹ Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton University Press, 2009.

² Kmenta J. Elements of Econometrics. 2-ге вид. University of Michigan Press, 1997.

³ Barro R. J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2-ге вид. MIT Press, 2003.

виробничі функції мусять мати показник степеня однорідності, що дорівнює одиниці⁴.

З іншого боку, як показують економіко-статистичні дослідження, найчастіше показник ступеня однорідності виробничої функції відрізняється від одиниці. Отже, стає нагальною потреба дослідити модель Солоу для цього випадку, а також, можливі макроекономічні наслідки.

1. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал

Почнемо розгляд проблеми з функції Кобба-Дугласа.

Нехай у деякій галузі статистичними дослідженнями визначена виробнича функція: $V = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, де K і L задані в вартісному вираженні. Маємо деякий капітал C . Необхідно визначити, яку часть цього капіталу варто вкласти в основні виробничі фонди, а яку – у робочу силу, щоб обсяг виробленої продукції V був найбільшим.

Фактично тут ми маємо наступну задачу на відшукування умовного екстремуму:

Знайти максимум функції

$$V(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta;$$

за умови

$$K + L = C; (C = \text{const})$$

причому,

$$K \geq 0, L \geq 0.$$

Виразимо L з рівняння зв'язку: $L = C - K$, і підставимо в аналітичний вираз $V(K, L)$:

$$V(K) = A \cdot K^\alpha (C - K)^\beta;$$

внаслідок того, що: $K \geq 0, L \geq 0$, вихідна задача еквівалентна задачі на знаходження найбільшого значення функції

$$V(K) = A \cdot K^\alpha (C - K)^\beta;$$

на відрізку $[0; C]$.

Знайдемо похідну:

$$\begin{aligned} V'(K) &= \alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot (C - K)^\beta - \beta A \cdot K^\alpha \cdot (C - K)^{\beta-1} = \\ &= \frac{\alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot (C - K)^\beta}{K} - \frac{\beta \cdot A \cdot K^\alpha \cdot (C - K)^{\beta-1}}{(C - K)} = \frac{\alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot (C - K)^\beta - \beta \cdot A \cdot K^\alpha \cdot (C - K)^{\beta-1}}{K(C - K)} = \\ &= \frac{A \cdot K^{\alpha-1} \cdot (C - K)^{\beta-1} (\alpha(C - K) - \beta K)}{K(C - K)}; \end{aligned}$$

Вимога $V'(K) = 0$ еквівалентна $\alpha \cdot (C - K) - \beta \cdot K = 0$, тому точка $K_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot C$ є критичною. Крім того, критичними є точки

⁴ Stiglitz, J. E. (1974). Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths. Review of Economic Studies, 41(Symposium Issue), 123–137.

$K_1 = 0$ і $K_2 = C$ – у них похідна $V'(K)$ не існує. Підставляючи K_0 , K_1 , K_2 в $V(K)$ отримуємо:

$$V(K_0) = \frac{A \cdot \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot C^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}; \quad V(K_1) = V(K_2) = 0;$$

Таким чином:

$$\max_{K \in [0, C]} V(K) = V\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot C\right) = \frac{A \cdot \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot C^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}.$$

Відповідне значення L складе: $L = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot C$.

Отже, для того, щоб одержати найбільший обсяг продукції V при обмеженні на вкладені засоби $K + L = C$, необхідно, щоб витрати на основні виробничі фонди склали $K = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot C$, а витрати праці: $L = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot C$.

Очевидно, що фондоозброєність при цьому складе:

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta};$$

Для функції Кобба-Дугласа дане співвідношення називається оптимальною фондоозброєністю. У загальному випадку, коли K і L задані в інших одиницях виміру, відмінних від грошових, співвідношення виглядає таким чином:

$$\frac{p_K \cdot K}{p_L \cdot L} = \frac{\alpha}{\beta};$$

де p_K і p_L - відповідно ціни основних виробничих фондів і робочої сили.

Можлива також інша постановка задачі:

Нехай у деякій галузі статистичними дослідженнями визначена виробнича функція: $V = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, причому K і L задані в грошовому вираженні. Потрібно створити підприємство, що обслуговує виконання замовлення на суму V_0 грошових одиниць. Необхідно визначити, які повинні бути витрати на основні фонди K і витрати праці L , щоб при виконанні замовлення витрата засобів була найменшою.

Це також задача на відшукування умовного екстремуму:

$$\begin{cases} z = K + L \rightarrow \min \\ A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta = V_0; \quad (V_0 = \text{const}); \\ K \geq 0; \\ L \geq 0; \end{cases}$$

Як і в попередній задачі, аналогічні міркування показують, що оптимальна фондоозброєність також складе:

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta},$$

причому основні виробничі фонди повинні бути притягнуті в обсязі:

$$K = \left(\frac{V_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},$$

$$\text{а витрати праці складуть: } L = \left(\frac{V_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

Тепер визначимо вплив коефіцієнту A у функції Кобба-Дугласа на стартовий капітал.

Як ми уже відзначили, якщо регресори K , L і регресант V вимірювати в вартісному вимірі, то різниця:

$$p(K, L) = V - (K + L)$$

дорівнює вартості прибавочного продукту, створюваного у процесі виробництва. У випадку функції Кобба-Дугласа:

$$p(K, L) = A \cdot K^\alpha L^\beta - (K + L).$$

Очевидно, що значення параметрів A , α , β і змінних K , L повинні бути таким, щоб $p(K, L) > 0$, тому що в протилежному випадку виробництво не має сенсу. Наприклад, якщо у процес виробництва вкладено дві грошові одиниці в такий спосіб: $K = 1$, $L = 1$, то для рентабельності необхідно $A > 2$. Однак параметри макроекономічної виробничої функції носять об'єктивний характер, тому, у процесі інвестування потрібна варіація K , L , домагаючись рентабельності виробництва. Відразу скажемо, що K , L будемо брати у відношенні оптимальної фондовоозброєності:

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Позначаючи весь вкладений капітал C , тобто $C = K + L$, отримуємо:

$$K = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot C; \quad L = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot C.$$

Як результат, отриманий прибавочний продукт:

$$p(K, L) = A \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \cdot C^{\alpha+\beta} - C;$$

Виходячи з вимоги $p(K, L) > 0$, можливі наступні випадки:

1. $\alpha + \beta > 1$.

Виробництво стає рентабельним при $C > \left(\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{A\alpha^\alpha\beta^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$.

Таким чином $C_0 = \left(\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{A\alpha^\alpha\beta^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$, є нижньою границею необхідного стартового капіталу при організації виробництва.

2. $\alpha + \beta < 1$.

Виробництво залишається рентабельним при $C < \left(\frac{A\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}$;

3. $\alpha + \beta = 1$.

Виробництво буде рентабельно при будь-якому C , однак необхідно, щоб параметри A , α , β задовольняли співвідношенню:

$$\frac{A\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} > 1.$$

Як приклад розглянемо виробничі функції валового внутрішнього продукту США :

$$V = 2,248 \cdot K^{0,404} L^{0,803};$$

та України:

$$V = 0,931 \cdot K^{0,539} L^{0,594};$$

(за даними 2020–2022р.).

Одержуємо мінімальні значення стартового капіталу:

США: $C_0 = 0,821829$ доларів

Україна: $C_0 = 621,6038$ гривень.

Навіть з огляду на курси валют очевидно, що відкрити підприємство в умовах американської економіки набагато легше. Видно, що значення C_0 в основному залежить від величини параметра A . Таким чином, малі значення цього параметра, отримані при економіко-статистичних дослідженнях, говорять про негативні тенденції в економіці і суспільстві, у першу чергу недосконалості законодавства і податкової політики.

Тепер розглянемо питання оптимальної фондоозброєності та стартового капіталу для функції із сталою еластичністю заміщення (CES):

$$V = \begin{cases} A \cdot (\beta \cdot K^{-\alpha} + (1 - \beta) \cdot L^{-\alpha})^{-\frac{\gamma}{\alpha}}, & \text{якщо } K \cdot L \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } K \cdot L = 0. \end{cases}$$

Екстремальна задача для сталих капіталовкладень матиме вигляд:

$$\begin{cases} V = A \cdot (\beta \cdot K^{-\alpha} + (1 - \beta) \cdot L^{-\alpha})^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \rightarrow \max \\ K + L = C; \quad (C = \text{const};) \\ K \geq 0; \\ L \geq 0; \end{cases}$$

Виразимо L з рівняння зв'язку: $L = C - K$, і підставимо в аналітичний вираз $V(K, L)$:

$$V(K) = A \cdot (\beta \cdot K^{-\alpha} + (1 - \beta) \cdot (C - K)^{-\alpha})^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Засобами диференціального числення, знайшовши похідну, можна визначити, що максимального значення функція $V(K)$ набуде, якщо :

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{\alpha+1} = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Звідси оптимальна фондоозброєність:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Отже, якщо нам задано загальну величину капіталовкладень, витрати варто розподілити таким чином:

$$K = \frac{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} C}{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}}; \quad L = \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}} C}{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}}.$$

Підставляючи у вираз виробничої функції CES, отримуємо:

$$V \left(\beta \cdot \left(\frac{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} C}{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}} \right)^{-\alpha} + (1-\beta) \cdot \left(\frac{(1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}} C}{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}} \right)^{-\alpha} \right)^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \\ = A \cdot \left(\frac{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}}{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{1+\alpha}} + (1-\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}}} \right) \cdot C^\gamma = A \cdot C^\gamma.$$

Таким чином, прибавочний продукт складає:

$$p(K, L) = A \cdot C^\gamma - C$$

Аналізуючи отриманий результат, враховуючи вимогу $p(K, L) > 0$, маємо випадки:

1. $\gamma > 1$.

Виробництво стає рентабельним при $C > \frac{1}{A^{\gamma-1}}$.

Таким чином $C_0 = \frac{1}{A^{\gamma-1}}$, є нижньою границею необхідного стартового капіталу при організації виробництва.

2. $\gamma < 1$.

Виробництво залишається рентабельним при $C < \frac{1}{A^{1-\gamma}}$;

3. $\gamma = 1$.

Виробництво буде рентабельно при будь-якому C , однак необхідно, щоб параметр A задовольняв співвідношенню:

$$A > 1.$$

Варто зробити ще два важливих висновки щодо функції CES:

1. Оптимальна фондоозброєність не залежить від показника степені однорідності γ .

2. Стартовий капітал не залежить від значення параметру α , а отже від еластичності заміщення σ , яку обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Отже, ми отримали значення оптимальної фондоозброєності та стартового капіталу для функції Кобба-Дугласа та функції із сталою еластичністю заміщення (CES). Можна стверджувати, що податкова та інвестиційна політика держави, рівень розвитку виробничих сил відбиваються на значенні параметрів виробничих функцій. Відзначимо,

що реальна величина мінімального стартового капіталу (C_0) трохи більше за розраховану. Справа в тому, що K – це вартість не всіх виробничих фондів, а тільки тієї частини, що перенесена на вироблену продукцію вартістю V . Крім того для оцінювання величини C_0 краще користатися не виробничою функцією валового внутрішнього продукту, а більш специфічною галузевою виробничою функцією.

Цікавим є питання про оптимальне значення інвестованого капіталу, якщо показник ступеня однорідності виробничої функції менший за одиниці. Крім того, поза дослідженням лишається проблема оптимальної фондоозброєності та стартового капіталу для функцій із змінною еластичністю заміщення (VES).

2. Модель Солоу для функції Кобба-Дугласа

Проблеми розвитку, прогнозування економічного зростання чи спадання, завжди цікавило економістів. Так, у [3, с. 212] розглянуто цю проблему, але це зроблено, виходячи з чисто якісних міркувань. Крім того, економічні тенденції вивчаються на протязі малих проміжків часу (8-10 років), тобто, коли суттєво помітні циклічні процеси в економіці. Для більш глобального дослідження успішно використовують так звану, динамічну модель Солоу.

Потужним інструментом економічного дослідження є виробничі функції [6, с. 7]. Деякі дослідники, виходячи з фізичних аналогій, наприклад [4, с. 8] вважають, що виробничі функції мусять мати показник степеня однорідності, що дорівнює одиниці.

Модель Солоу з таким показником описана у [2, с. 194] та [5, с. 72]. Зіншого боку, як показують економіко-статистичні дослідження, найчастіше показник степеня однорідності виробничої функції відрізняється від одиниці. Отже, стає нагальною потреба дослідити модель Солоу для цього випадку, а також, можливі макроекономічні наслідки.

У даній моделі [1, с. 38] економіка розглядається як єдине ціле, що робить один універсальний продукт, що може споживатися й інвестуватися (експорт і імпорт не враховуються). Стан економіки в цій моделі заданий наступними змінними:

X – Валовий суспільний продукт (ВСП),

C – фонд невикористаного споживання,

K – основні виробничі фонди,

I – інвестиції в основні виробничі фонди,

L – число зайнятих.

Крім того, використовують такі екзогенні параметри:

ν – річний темп приросту числа зайнятих,

μ – частка вибулих за рік основних виробничих фондів,

a – коефіцієнт прямих витрат (частка проміжного продукту у ВСП),
 ρ – норма накопичення (частка валових інвестицій у ВСП).

Причому:

$$-1 < v < 1; \quad 0 < \mu < 1; \quad 0 < a < 1; \quad 0 < \rho < 1.$$

Час t вважають неперервним і вимірюється в роках. Річний випуск ВСП у кожному мить часу визначається неокласичною виробничою функцією:

$$X = F(K, L),$$

а чисельність трудових ресурсів за формулою:

$$L = L_0 e^{vt}.$$

Знос та інвестиції в розрахунку на рік рівні відповідно: μK і I , а за проміжок часу Δt : $\mu K \Delta t$ і $I \Delta t$.

Тому приріст фондів за час Δt складе:

$$\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t.$$

Розділивши на Δt , одержимо:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\mu K + I.$$

Переходячи до межі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо таке диференціальне рівняння:

$$K' = -\mu K + I.$$

Оскільки проміжний продукт дорівнює aX , валовий внутрішній продукт (ВВП) складе:

$$(1 - a)X,$$

у тому числі інвестиції:

$$I = \rho(1 - a)X,$$

а фонд невиробничого споживання:

$$C = (1 - \rho)(1 - a)X.$$

Крім того, маємо початкові умови для основних виробничих фондів:

$$K(0) = K_0;$$

і трудових ресурсів:

$$L(0) = L_0.$$

З огляду на динаміку чисельності трудових ресурсів L , і той факт, що валовий суспільний продукт обчислюється за допомогою виробничої функції $X = F(K, L)$, маємо запис моделі Солоу в абсолютних показниках:

$$\begin{cases} L = L_0 e^{vt}; \\ K' = \mu K + \rho(1 - a)X; \\ K(0) = K_0; \\ X = F(K, L); \\ I = \rho(1 - a)X; \\ C = (1 - \rho)(1 - a)X. \end{cases}$$

Однак зручніше розглядати дану модель в іншій формі.

Для цього введемо наступні відносні показники:

$k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність;

$x = \frac{\dot{X}}{L}$ – середня продуктивність праці у всій економіці;

$i = \frac{I}{L}$ – питомі інвестиції (на одного зайнятого);

$c = \frac{C}{L}$ – середньоособове споживання (на одного зайнятого).

Тому що ВСП обчислюється по формулі:

$$X = F(K, L),$$

де $F(K, L)$ – однорідна функція степеня γ ,

то:

$$x = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{L^\gamma F(\frac{K}{L}, 1)}{L} = L^{\gamma-1} F(\frac{K}{L}, 1) = L^{\gamma-1} f(k) = L_0^{\gamma-1} f(k) e^{(\gamma-1)\nu t}.$$

Оскільки $i = (1 - a)x$, $c = (1 - \rho)(1 - a)x$,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = k'L + kL' = k'L + \nu Lk,$$

отримаємо модель Солоу в питомих показниках:

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -(\mu + \nu)k + \rho(1 - a)L_0^{\gamma-1} f(k) e^{(\gamma-1)\nu t}; \\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}; \\ i = \rho(1 - a)L_0^{\gamma-1} f(k) e^{(\gamma-1)\nu t}; \\ c = (1 - \rho)(1 - a)L_0^{\gamma-1} f(k) e^{(\gamma-1)\nu t}. \end{cases}$$

Центральним у моделі є диференціальне рівняння

$$\frac{dk}{dt} = -(\mu + \nu)k + \rho(1 - a)L_0^{\gamma-1} f(k) e^{(\gamma-1)\nu t};$$

разом з початковою умовою $k(0) = k_0$. Розв'язавши задачу Коші, визначивши тим самим функцію зміни фондоозброєності $k = k(t)$, можна легко знайти інші показники, як відносні, так і абсолютні. Якщо виробнича функція є функцією Кобба-Дугласа, середня продуктивність праці x має вигляд:

$$x = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L^{\alpha L^{1-\alpha}}} = Ak^\alpha L^{\alpha+\beta-1} = Ak^\alpha L_0^{\alpha+\beta-1} e^{(\alpha+\beta-1)\nu t},$$

а модель виглядає таким чином:

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -(\mu + \nu)k + \rho(1 - a)L_0^{\alpha+\beta-1} Ak^\alpha e^{(\alpha+\beta-1)\nu t}; \\ k(0) = k_0; \\ i = \rho(1 - a)L_0^{\alpha+\beta-1} Ak^\alpha e^{(\alpha+\beta-1)\nu t}; \\ c = (1 - \rho)(1 - a)L_0^{\alpha+\beta-1} Ak^\alpha e^{(\alpha+\beta-1)\nu t}. \end{cases}$$

Розглядаючи центральне рівняння:

$$\frac{dk}{dt} = -(\mu + \nu)k + \rho(1 - a)L_0^{\alpha+\beta-1}Ak^\alpha e^{(\alpha+\beta-1)\nu t},$$

зазначимо, що воно є рівнянням Бернуллі, тобто має вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha.$$

Отримаємо його загальний розв'язок:

$$k(t) = e^{-(\mu+\nu)t} \left(\frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}e^{(\nu(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+\nu))t}}{\nu(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+\nu)} + C \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

З огляду на початкову умову $k(0) = k_0$, маємо:

$$C = k_0^{1-\alpha} - \frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}}{\nu(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+\nu)}.$$

Звідси розв'язок задачі Коші:

$$k(t) = \left(\frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}e^{\nu(\alpha+\beta-1)t}}{\nu(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+\nu)} + k_0^{1-\alpha} - \frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}}{\nu(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+\nu)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-(\mu+\nu)t}.$$

Випадок, якщо для функції Кобба-Дугласа виконано умову $\alpha + \beta = 1$, розглянуто у [1].

Графік функції $k = k(t)$ у випадку $k_0 = k_{st} = \left(\frac{\rho(1-a)A}{\mu+\nu} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ називають стаціонарною траєкторією.

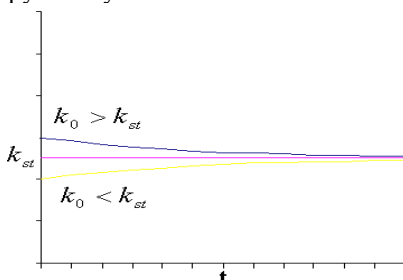
На стаціонарній траєкторії стала не тільки фондоозброєність, але й інші показники:

$$x = x_0 = \text{const}; \quad c = c_0 = \text{const}; \quad i = i_0 = \text{const}.$$

Дослідження показують, що якщо початкова фондоозброєність k_0 більше k_{st} , то $k(t)$ з часом зменшується, асимптотично наближуючись до k_{st} . Якщо ж навпаки $k_0 < k_{st}$, то фондоозброєність зростає, наближаючись до k_{st} . Тобто в будь-якому випадку:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_{st}$$

Це добре ілюструє наступний малюнок:



Зазначимо, що стійке стаціонарне, розв'язок $k(t) = k_{st}$ існує в моделі Солоу не тільки для функції Кобба-Дугласа при $\alpha + \beta = 1$, але і для будь-якої неокласичної виробничої функції, якщо ступінь її однорідності $\gamma = 1$.

Але метою цього дослідження є більш загальний випадок, а саме коли для функції Кобба-Дугласа $\alpha + \beta \neq 1$. «Нестационарний» характер розвитку світової економіки свідчить на користь останнього.

Розглядаючи розв'язок задачі Коші для $\alpha + \beta \neq 1$, можемо зазначити, що воно має таку структуру:

$$k(t) = (M_1 e^{v(\alpha+\beta-1)t} + M_2 e^{-(1-\alpha)(\mu+v)t})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

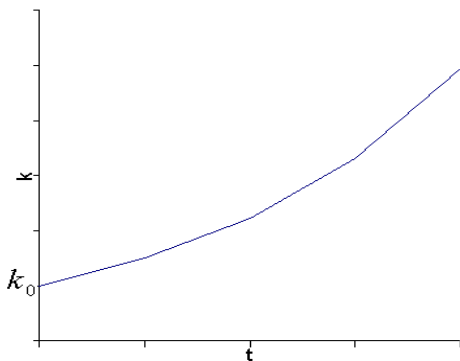
де M_1 і M_2 – для стислості позначимо множники, що фігурують у розв'язку:

$$M_1 = \frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}}{v(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+v)},$$

$$M_2 = k_0^{1-\alpha} - \frac{A(1-\alpha)(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}}{v(\alpha+\beta-1)+(1-\alpha)(\mu+v)}.$$

Отже, можливі такі випадки:

1) $\alpha + \beta > 1$ і $v > 0$ (народонаселення зростає). У цьому випадку фондоозброєність k має тенденцію до зростання, причому темпи приросту зростають:



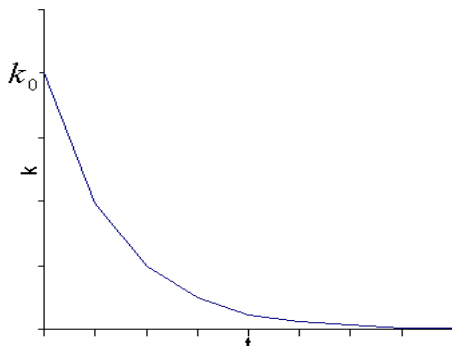
2) $\alpha + \beta < 1$ і $v < 0$ (населення спадає). У цьому випадку також має місце зростання k .

3) Коли $\alpha + \beta > 1$ і $v < 0$ динаміка фондоозброєності залежить від знаку множника при M_2 . Тому в цій ситуації можливі два варіанти:

а) чисельність населення скорочується швидше, ніж вибувають виробничі фонди: $-v > \mu$. Внаслідок цей показник множника при M_2 буде додатним, і тому фондоозброєність буде зростати.

б) основні виробничі фонди зменшуються швидше, ніж скорочуються трудові ресурси, тобто $-\nu < \mu$. У цьому випадку фондоозброєність асимптотично буде наближатись до нуля

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$



Спробуємо дати пояснення цьому парадоксальному факту, що при $\alpha + \beta > 1$, $\nu < 0$ і $-\nu < \mu$ відбувається спадання фондоозброєності. Виразимо середню продуктивність праці:

$$x = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L^\alpha L^{1-\alpha}} = AK^\alpha L^{\alpha+\beta-1} = AK^\alpha L_0^{\alpha+\beta-1} e^{(\alpha+\beta-1)\nu t}.$$

Останній вираз показує, що при $\alpha + \beta > 1$, $\nu < 0$ середня продуктивність праці спадає. Крім того, парадоксальні прогнози в моделі Солоу можливі через те, що ми не враховували факт зміни екзогенних параметрів з часом.

4) $\alpha + \beta < 1$ і $\nu > 0$ (народонаселення зростає). У цьому випадку, також,

фондоозброєність асимптотично буде наближатись до нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$$

Природно, що при цьому середньоособове споживання також наближається до нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0,$$

Іншими словами відбувається стрімке зuboжіння населення.

5) Обсяг трудових ресурсів не змінюється, $\nu = 0$. У цьому випадку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_{st} = \left(\frac{A(1-a)L_0^{\alpha+\beta-1}}{\mu} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

тобто має місце стійка стаціонарна траєкторія: $k(t) = k_{st}$.

Природно, що зростання або спадання фондоозброєності k викликає відповідно зростання або спадання споживання c , тому що середньоособове споживання c визначається співвідношенням:

$$c = (1 - \rho)(1 - a)L_0^{a+\beta-1}Ak^\alpha e^{(\alpha+\beta-1)\nu t}.$$

Порівнюючи розглянуті ситуації зазначимо, що сама прийнятна для економіки – це перша, а саме коли $\alpha + \beta > 1$ і $\nu > 0$. За цією схемою в двадцятому сторіччі розвивалися більшість країн. Ця ж схема пояснює, чому промислово розвинуті країни (США, Великобританія, Німеччина і т.д.) де $\alpha + \beta > 1$, рекрутують трудові ресурси в країнах третього світу як безпосередньо (імміграція), так і опосередковано (організація СП, експорт капіталу і т.і.). Інакше кажучи, якщо ми хочемо мати розвинуту економіку ($\alpha + \beta > 1$), необхідно стимулювати збільшення обсягу трудових ресурсів L як чисто кількісно ($\nu > 0$), так і якісно (освіта, підвищення кваліфікації й ін.).

3. Модель Солоу для функції Леонтьєва

Розглянемо тепер модель Солоу для функції Леонтьєва. Нагадаємо, функція Леонтьєва має вигляд:

$$X = \min\left(\frac{K}{a_K}, \frac{L}{a_L}\right).$$

де:

a_K – норми витрат капіталовкладень в основні виробничі фонди,

a_L – норми витрат праці.

X – як і раніше, ВСП.

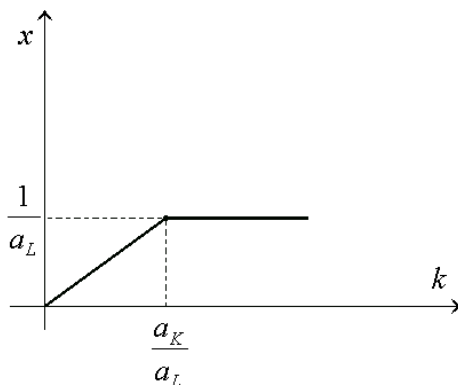
Вона є однорідною функцією степеня 1. Переходячи до питомих показників, для середньої продуктивності праці отримуємо:

$$x = \frac{X}{L} = \min\left(\frac{k}{a_K}, \frac{1}{a_L}\right);$$

тобто :

$$x = f(k) = \begin{cases} \frac{k}{a_K}, & k \leq \frac{a_K}{a_L}; \\ \frac{1}{a_L}, & k > \frac{a_K}{a_L}. \end{cases}$$

Графічно це виглядає таким чином:



Центральне рівняння моделі приймає вигляд:

$$\frac{dk}{dt} + (\mu + \nu)k = \rho(1-a) \cdot \begin{cases} \frac{k}{a_K}, & k \leq \frac{a_K}{a_L}; \\ \frac{1}{a_L}, & k > \frac{a_K}{a_L}. \end{cases}$$

Іншими словами, задача зводиться до аналізу розв'язків двох рівнянь:

$$\frac{dk}{dt} + \left(\mu + \nu - \frac{\rho(1-a)}{a_K} \right) k = 0;$$

і

$$\frac{dk}{dt} + (\mu + \nu)k = \rho(1-a) \cdot \frac{1}{a_L},$$

а також можливості переходу одного розв'язку в інший.

Рівняння дають відповідно розв'язки

$$k = k_0 \exp \left(\left(\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu \right) t \right);$$

$$k = \left(k_0 - \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)} \right) \cdot \exp(-(\mu + \nu)t) + \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}.$$

Очевидно, якщо $k_0 < \frac{a_K}{a_L}$, можливі три випадки:

1) При $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu < 0$ має місце спад фондоозброєності:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

2) Якщо $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu = 0$, то траєкторія є стаціонарною:

$$k(t) = k_0.$$

3) У випадку $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu > 0$ має місце експоненціальне зростання

фондоозброєності доти, доки не досягне значення $k^* = \frac{a_K}{a_L}$. Далі має місце змінювання $k(t)$ відповідно до другого розв'язку з $k_0 = \frac{a_K}{a_L}$.

Для $k_0 > \frac{a_K}{a_L}$ можливі наступні ситуації:

1) Якщо $\frac{a_K}{a_L} < k_0 < \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}$ має місце обмежене зростання $k(t)$, причому:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_{st} = \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}.$$

2) При $\frac{a_K}{a_L} < \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)} < k_0$ відбувається обмежене спадання $k(t)$, і знову:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_{st} = \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}.$$

3) Коли $k_0 = \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}$, $k(t) = k_0$ (стаціонарна траєкторія).

4) Якщо $\frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)} < \frac{a_K}{a_L} < k_0$, має місце спадання до точки $k^* = \frac{a_K}{a_L}$.

Залишається з'ясувати, що ж відбувається з фондоозброєністю $k(t)$ після досягнення точки $k^* = \frac{a_K}{a_L}$, чи якщо $k_0 = k^* = \frac{a_K}{a_L}$.

Для $k_0 = k^* = \frac{a_K}{a_L}$ можливі наступні варіанти розвитку:

1) При $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu < 0$ відбувається спадання фондоозброєності:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

2) Якщо $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu = 0$, то траєкторія є стаціонарною:

$$k(t) = k_0 = \frac{a_K}{a_L}.$$

3) Якщо $\frac{\rho(1-a)}{a_K} - \mu - \nu > 0$, має місце обмежене зростання $k(t)$, причому:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)}.$$

Отже, в будь якому випадку, якщо розвиток економіки описується функцією Леонтьєва, фондоозброєність, та інші показники стабілізуються, має місце стагнація:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \frac{\rho(1-a)}{a_L(\mu+\nu)},$$

або ж ми спостерігатимемо тенденції занепаду та зубожіння:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

Автор вважає, що така перспектива притаманна економікам країн, що орієнтуються здебільшого на розвиток сировинних галузей та туристичного бізнесу.

4. Модифікація моделі Солоу з урахуванням екологічних обмежень та соціальних чинників сталого розвитку

Класична модель Солоу, хоч і є потужним інструментом для аналізу довгострокового економічного зростання, має суттєві обмеження в контексті сучасних викликів сталого розвитку. Вона не враховує:

1. Обмеженість природних ресурсів.
2. Негативні екстерналії, спричинені деградацією довкілля.
3. Соціальні чинники, що визначають якість людського капіталу та інституційну спроможність суспільства.

З огляду на це, виникає потреба у формулюванні розширеної моделі, яка дозволяє адекватно описати взаємозв'язок між економічною динамікою, екологічним станом та соціальним добробутом.

Для врахування природного капіталу модель Солоу модифікується шляхом включення ресурсу $R(t)$ як додаткового виробничого чинника. Загальна форма функції виробництва набуває вигляду:

$$V(t) = F(K(t), L(t), R(t), A(t))$$

Зокрема, при використанні узагальненої кобб-дугласової функції виробництва:

$$V(t) = (A(t))^{1-\alpha-\beta-\gamma} \cdot K^\alpha(t) \cdot L^\beta(t) \cdot R^\gamma(t), \quad \alpha, \beta, \gamma \in [0,1],$$

де:

$K(t)$ – фізичний капітал,

$L(t)$ – трудові ресурси,

$R(t)$ – природні ресурси (вичерпні або поновлювані),

$A(t)$ – технологічний рівень.

Моделювання деградації довкілля

Щоб врахувати негативний вплив економічної діяльності на довкілля, вводиться змінна $D(t)$, яка репрезентує обсяг екологічної деградації (наприклад, рівень забруднення, втрату біорізноманіття, виснаження ґрунтів). Динаміка цієї змінної описується рівнянням:

$$\dot{D}(t) = \varphi V(t) - \delta_D D(t)$$

де:

$\varphi > 0$ — коефіцієнт екологічної шкоди на одиницю виробництва,

$\delta_D > 0$ — швидкість природної регенерації екосистем. Точкою тут позначено похідну за змінною t .

Вплив деградації на економіку моделюється через зниження ефективності виробництва:

$$V(t) = A^\delta(t) \cdot K^\alpha(t) \cdot L^\beta(t) \cdot R^\gamma(t) \cdot \Psi(D(t)), \quad \Psi'(D) < 0.$$

Включення соціального капіталу

Для відображення соціальних факторів вводиться змінна $S(t)$, яка відображає рівень соціального капіталу, зокрема якість освіти, охорони здоров'я, інституцій та суспільної довіри. Еволюція $S(t)$ задається рівнянням:

$$\dot{S}(t) = \theta V(t) - \mu S(t),$$

де:

$\theta \in [0,1]$ — частка продукції, що інвестується у соціальні сфери,

$\mu > 0$ — темп "зносу" соціального капіталу.

Соціальний капітал опосередковано впливає на технологічний прогрес або продуктивність праці визначається за формулою:

$$A(t) = A_0 e^{gt} \cdot \chi(S(t)), \quad \chi'(S) > 0.$$

Тут:

$A(t)$ — загальний рівень технологій або ефективність праці на момент часу t .

A_0 — початковий рівень технологій (при $t=0$).

g — сталий темп екзогенного технологічного прогресу. Це той самий параметр, що і у класичній моделі Солоу. Його природа — зовнішня для моделі (наприклад, наукові відкриття, світовий технічний прогрес).

$\chi(S(t))$ — функція залежності продуктивності від соціального капіталу $S(t)$. Вона описує ендогенний (внутрішній) вплив: чим вищий рівень соціального розвитку (освіта, здоров'я, ефективність інституцій), тим ефективніше впроваджуються або створюються технології.

Повна динамічна система

Узагальнена модель має вигляд системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = sV(t) - \delta_K K(t) \\ \dot{R}(t) = -u(t)R(t) \\ \dot{D}(t) = \varphi V(t) - \delta_D D(t) \\ \dot{S}(t) = \theta V(t) - \mu S(t) \\ \dot{C}(t) = (1 - s) V(t) \end{cases}$$

де:

s — норма заощаджень,

δ_K — норма амортизації фізичного капіталу,

$u(t)$ — інтенсивність використання природного ресурсу,

$C(t)$ — обсяг споживання.

Критерій сталого розвитку

Для оцінки стійкості системи вводиться інтегральна функція міжчасового добробуту:

$$W = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t), D(t), S(t)) dt$$

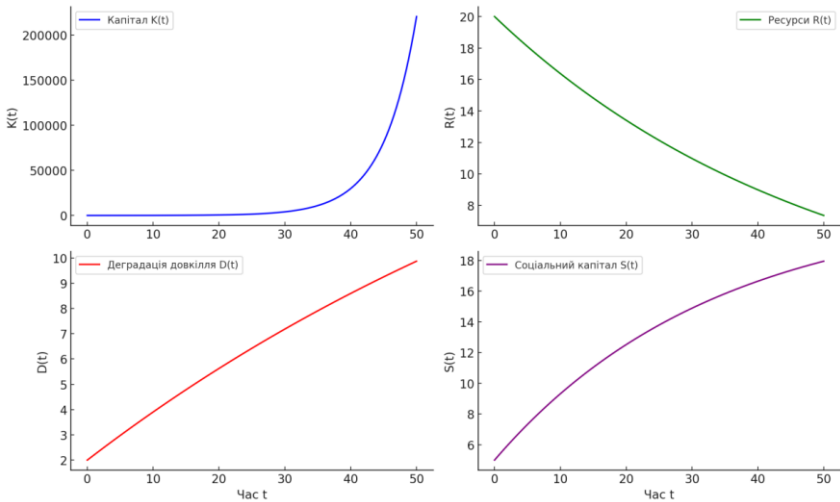
де:

$\rho > 0$ – коефіцієнт часової переваги,

U – функція корисності, що залежить не лише від споживання, а й від екологічного та соціального стану.

Умова **сталого розвитку** означає існування таких траєкторій керування (зокрема, $s(t)$, $u(t)$, $\theta(t)$), за яких функція W не зменшується в часі.

Динаміка змінних у модифікованій моделі Солоу



На графіках зображено еволюцію основних змінних модифікованої моделі Солоу:

- Капітал $K(t)$ зростає експоненційно за умови позитивної чистої норми накопичення.
- Природні ресурси $R(t)$ зменшуються з часом через виснаження.
- Деградація довкілля $D(t)$ накопичується, але стабілізується за рахунок регенерації.

- Соціальний капітал $S(t)$ поступово зростає внаслідок інвестицій з виробництва.

Запропонована модифікація:

1. Дозволяє досліджувати сценарії виснаження ресурсів та їх вплив на темпи зростання;
2. Створює основу для аналізу екологічної політики (вуглецеві податки, інвестиції в «зелені» технології);
3. Інтегрує соціальний добробут в ядро макроекономічної динаміки;
4. Може бути використана як база для формалізації концепції «зеленої економіки».

5. Інтеграція інституційних факторів та ендегенних моделей у дослідження економічного зростання

Модель Солоу, хоч і є потужним інструментом для аналізу економічного зростання, зазнає критики за свою спрощеність, зокрема за ігнорування інституційних факторів та екзогенність технологічного прогресу. Сучасні економічні дослідження дедалі більше зосереджуються на інтеграції цих аспектів, щоб краще пояснити різницю в рівнях розвитку між країнами та динаміку перехідних економік. Цей розділ розглядає, як інституційні фактори та ендегенні моделі можуть бути інтегровані в рамки моделі Солоу, спираючись на існуючі теоретичні розробки та емпіричні дані, а також пропонує напрями для подальших досліджень.

Інституційні фактори як детермінанти зростання

Інституційні фактори, такі як якість правової системи, захист майнових прав, рівень корупції та ефективність уряду, відіграють вирішальну роль у визначенні економічного зростання. Д. Асемоглу⁵ аргументує, що інституції впливають на продуктивність факторів виробництва, модифікуючи параметр технології A у виробничій функції $V = F(K, L, A)$. Наприклад, сильні інституції сприяють накопиченню капіталу, зменшуючи транзакційні витрати та підвищуючи довіру інвесторів. Асемоглу наводить емпіричні приклади, показуючи, що країни з кращими інституціями (наприклад, країни Північної Європи) демонструють стабільніше зростання, ніж ті, де переважають слабкі інституції (наприклад, деякі країни Африки).

Інтеграція інституційних факторів у модель Солоу може відбуватися через введення індексу інституційної якості A , який множить A , тобто $\hat{A} = A \cdot I$. Це дозволяє моделювати, як покращення інституцій

⁵ Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton University Press, 2009.

(зростання I) підвищує загальну продуктивність. Наприклад, якщо I залежить від рівня демократії чи правового захисту, то поліпшення цих аспектів може зрушити стійкий стан k^* у бік вищого рівня капіталу на одиницю праці. Такий підхід вимагає емпіричної калібровки, що підкреслює необхідність даних про інституції, таких як Індекс сприйняття корупції від Transparency International.

Ендогенні моделі та технологічний прогрес

Традиційна модель Солоу розглядає технологічний прогрес як екзогенний, що обмежує її здатність пояснювати джерела довгострокового зростання. П. Ромер у своїй роботі пропонує ендогенну альтернативу, де технології є результатом економічних рішень, таких як інвестиції в дослідження та розробки (R&D) і освіту⁶. У моделі Ромера технологічний прогрес моделюється через накопичення «капіталу знань» H , що входить у виробничу функцію як

$V = F(K, L, H)$, де H зростає пропорційно витратам на інновації.

Інтеграція ендогенних моделей у рамки Солоу передбачає заміну темпу екзогенного технологічного прогресу g на функцію, що залежить від економічних змінних. Наприклад, темп зростання технології може бути заданий як

$$\dot{A} = A\phi\left(\frac{H}{K}\right),$$

де ϕ – функція, що відображає продуктивність R&D відносно капіталу. Це дозволяє моделювати, як інвестиції в людський капітал чи інфраструктуру генерують ендогенний технологічний прогрес, зрушуючи траєкторію $k(t)$ у бік вищого зростання. Де Ла Гранвіль підтримує цю ідею, пропонуючи уніфіковану функцію, де еластичність заміщення та ендогенний прогрес враховуються одночасно, що особливо актуально для країн, що розвиваються⁷.

Синтез підходів: комбінована модель

Комбінація інституційних факторів і ендогенних моделей може бути реалізована через розширену версію моделі Солоу⁸. Наприклад, виробнича функція може приймати вигляд

$$V = A(I) F(K, L, H),$$

⁶ Romer P. M. *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill 2019. – 728 с.

⁷ de La Grandville O. *Economic Growth: A Unified Approach*. 2-ге вид. Cambridge University Press, 2016.

⁸ Hanushek, E. A., & Rodrik, D. (2011). Institutions, Human Capital, and Development. *Annual Review of Economics*, 3(1), 401-426.

де $A(I)$ залежить від інституційного індексу, а H – від ендегенних інвестицій. Диференціальне рівняння для капіталу на одиницю ефективної праці тоді матиме вигляд:

$$\dot{k} = sA(I)f(k, h) - (n + g(H) + \delta)k,$$

де

$h = H/L$ — капітал знань на одиницю праці,

$g(H)$ – ендегенна функція технологічного зростання.

n – темп зростання населення.

Така модель дозволяє аналізувати, як інституції впливають на продуктивність, а інвестиції в R&D – на темп зростання A .

Емпірична перевірка цієї комбінованої моделі потребує даних про інституції та витрати на інновації. Барро та Сала-і-Мартін пропонують використовувати панельні дані для оцінки ефектів⁹, а Кмента рекомендує регресійний аналіз із фіксованими ефектами для врахування гетерогенності країн¹⁰. Наприклад, оцінка $\partial k^*/\partial I > 0$ може підтвердити позитивний вплив інституцій, тоді як $\partial g/\partial H > 0$ – роль ендегенних технологій.

Інтеграція цих факторів стикається з кількома викликами. По-перше, вимірювання інституційної якості є суб'єктивним і залежить від джерел даних (наприклад, Індекс економічної свободи від Heritage Foundation). По-друге, моделювання ендегенного прогресу вимагає точних даних про R&D, які часто недоступні для країн, що розвиваються. По-третє, комбінована модель ускладнює аналітичні рішення, вимагаючи чисельних методів, таких як Рунге-Кутта, які ти використовував у своїх попередніх роботах.

Для подальших досліджень варто розробити динамічні моделі, що враховують взаємодію I і H у часі. Наприклад, можна дослідити, як реформи інституцій впливають на прискорення технологічного прогресу.

Інтеграція інституційних факторів і ендегенних моделей значно розширює аналітичні можливості моделі Солоу, дозволяючи пояснити складніші аспекти економічного зростання. Інституції визначають базову продуктивність, тоді як ендегенний технологічний прогрес забезпечує довгостроковий розвиток. Комбінована модель, хоча й складніша, пропонує більш реалістичний підхід, що враховує як структурні, так і поведінкові фактори. Подальші дослідження повинні зосередитися на емпіричній перевірці та розробці чисельних

⁹ Barro R. J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2-ге вид. MIT Press, 2003.

¹⁰ Kmenta J. Elements of Econometrics. 2-ге вид. University of Michigan Press, 1997.

інструментів для оцінки цих ефектів, що сприятиме кращому розумінню глобальних економічних диспропорцій.

ВИСНОВКИ

Отже, ми отримали значення оптимальної фондоозброєності та стартового капіталу для функції Кобба-Дугласа та функції із сталою еластичністю заміщення (CES). Можна стверджувати, що податкова та інвестиційна політика держави, рівень розвитку виробничих сил відбиваються на значенні параметрів виробничих функцій. Відзначимо, що реальна величина мінімального стартового капіталу (C_0 трохи більше за розраховану. Справа в тому, що K – це вартість не всіх виробничих фондів, а тільки тієї частини, що перенесена на вироблену продукцію вартістю V . Крім того для оцінювання величини C_0 краще користатися не виробничою функцією валового внутрішнього продукту, а більш специфічною галузевою виробничою функцією.

АНОТАЦІЯ

Викладено дослідження із застосуванням математичного апарату функції Кобба-Дугласа та функції із сталою еластичністю заміщення (CES), отримані математичні вирази для оптимальної фондоозброєності та нижньої границі для стартового капіталу. Зроблені висновки щодо впливу параметрів на економічні наслідки. Крім того, розглянуто модель Солоу для функції Кобба-Дугласа, а для випадків, коли показник степеня однорідності відмінний від одиниці. Також розглянуті економічні наслідки, які випливають з отриманих розв'язків.

Застосовано модель Солоу для дослідження довгострокових тенденцій економічного зростання в контексті сучасних глобалізаційних викликів. Показано, що модель Солоу, попри свою класичну природу, зберігає високу евристичну цінність для вивчення траєкторій розвитку як окремих країн, так і світової економіки загалом.

Здійснений аналіз доводить, що ключовими факторами стабільного зростання залишаються норма заощаджень, темп приросту населення та темп технічного прогресу. Водночас адаптація моделі до сучасних реалій потребує включення додаткових змінних, зокрема пов'язаних із інституційними чинниками, глобальними потоками капіталу та нерівномірністю доступу до технологій.

З огляду на тенденцію до уповільнення темпів зростання у розвинених країнах та демографічний тиск у країнах, що розвиваються, модель Солоу дозволяє прогнозувати наявність потенційних точок рівноваги й ідентифікувати фактори, які можуть порушити стійкість глобального зростання.

Таким чином, модель Солоу залишається ефективним інструментом макроекономічного аналізу, який, за умови належної модифікації, здатен враховувати сучасні трансформаційні процеси в світовій економіці.

Література

1. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton University Press, 2009. URL: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691132921/introduction-to-modern-economic-growth>
2. Barro R. J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. MIT Press, 2003. URL: <https://mitpress.mit.edu/9780262025539/economic-growth/>
3. Kmenta J. Elements of Econometrics. 2-ге вид. University of Michigan Press, 1997. URL: <https://press.umich.edu/Books/E/Elements-of-Econometrics>
4. Черевко Є. В. Модель Солоу в перспективах розвитку світової економіки. *Вісник соціально-економічних досліджень*. 2005. Вип. 31. С. 319–324.
5. Romer P. M. Advanced Macroeconomics. McGraw-Hill 2019. 728 p. ISBN10: 1260185214
6. Hanushek, E. A., & Rodrik, D. (2011). Institutions, Human Capital, and Development. *Annual Review of Economics*, 3(1), 401–426. DOI: 10.1146/annurev-economics-061109-080334.
7. Dasgupta, P., & Heal, G. (1974). The Optimal Depletion of Exhaustible Resources. *Review of Economic Studies*, 41(5), 3–28. DOI: <https://doi.org/10.2307/2296370>
8. Stiglitz, J. E. (1974). Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths. *Review of Economic Studies*, 41(Symposium Issue), 123–137. DOI: <https://doi.org/10.2307/2296373>
9. Arrow, K. J., Dasgupta, P., Goulder, L. H., Daily, G. C., Ehrlich, P. R., Levin, S., Mäler, K. G., Schneider, S. H., Starrett, D., & Walker, B. (2004). Are We Consuming Too Much? *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 147–172. <https://doi.org/10.1257/0895330042162377>
10. Hartwick, J. M. (1977). Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources. *American Economic Review*, 67(5), 972–974. URL: <https://www.jstor.org/stable/1827282>
11. de La Grandville O. *Economic Growth: A Unified Approach*. Cambridge University Press, 2016. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/economic-growth/C442AE1B49EC1C84FFDEFF2FB38D5F88>

Information about the author:

Yevhen Cherevko

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Cybersecurity
National University “Odesa Law Academy”
23, Fontanska St, Odesa, 65009, Ukraine