

DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-612-6-8>**ROUTE OPTIMIZATION IN NAVIGATION****ОПТИМІЗАЦІЯ МАРШРУТІВ У СУДНОВОДІННІ****Syvash S. B.**

*Candidate of Physical and
Mathematical Sciences, Associate
Professor,
Associate Professor at the Department
of Higher Mathematics,
Odesa National Maritime University
Odesa, Ukraine*

Сиваш С. Б.

*кандидат фізико-математичних
наук, доцент,
доцент кафедри «Вища
математика»
Одеський національний морський
університет
м. Одеса, Україна*

В сучасних умовах безперервного дорожчання енергоресурсів актуальними є наукові дослідження, спрямовані на мінімізацію витрат на морські перевезення, оптимізацію маршрутів, дослідження питань підвищення безпеки судноплавства. В цьому контексті розглядається задача вибору траєкторії та режиму роботи силової установки, які в сукупності забезпечують прибуття судна до пункту призначення у заданий момент часу при мінімальних витратах пального.

Рух відбувається у площині $xу$. Нехай пункт відправлення співпадає з початком координат, а пункт прибуття в точці $B(x_0, y_0)$. Відома швидкість течії $v_T(x, y)$ у кожній точці траєкторії та її проєкції на координатні осі $v_{Tx}(x, y)$; $v_{Ty}(x, y)$. Швидкість руху судна $\bar{v}$ дорівнює геометричній сумі швидкості течії $\bar{v}_T$ і швидкості судна $\bar{v}_0$ відносно води: $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_T$;

$$v_x = v_{0x} + v_{Tx}, \quad (1)$$

Нехай швидкість судна відносно води утворює з віссю Ox кут α .

Тоді $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Врахуємо, що $v'_x = \frac{dx}{dt}$; $v'_y = \frac{dy}{dt}$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha + v_{Tx}; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha + v_{Ty};$$

з рівності (1) отримуємо:

$$\frac{dx}{v_0 \cos \alpha + v_{Tx}} = dt; \quad \frac{dy}{v_0 \sin \alpha + v_{Ty}} = dt.$$

Час руху судна до пункту В

$$T = \int_0^{x_0} \frac{dx}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}}. \quad (2)$$

Умова його прибуття до цього пункту: $y = y_0$. Врахуємо, що

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0 \sin \alpha + v_{yT}}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}}; \quad dy = \frac{v_0 \sin \alpha + v_{yT}}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} dx. \quad \text{Тоді отримаємо:}$$

$$y = \int_0^{x_0} \frac{v_0 \sin \alpha + v_{yT}}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} dx. \quad (3)$$

Поставимо задачу визначення оптимальної траєкторії $\alpha(x)$, яка забезпечує мінімум інтегралу (2) за умови (3). Це задача на умовний екстремум. Функція Лагранжа

$$F = \frac{1}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} + \lambda_0 \frac{v_0 \sin \alpha + v_{yT}}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}}.$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{v_0 \sin \alpha}{(v_0 \cos \alpha + v_{xT})^2} + \lambda_0 \frac{v_0 \cos \alpha (v_0 \cos \alpha + v_{xT}) + v_0 \sin \alpha (v_0 \sin \alpha + v_{yT})}{(v_0 \cos \alpha + v_{xT})^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{v_0 \sin \alpha + \lambda_0 v_0^2 + v_0 (v_{xT} \cos \alpha + v_{yT} \sin \alpha) \lambda_0}{(v_0 \cos \alpha + v_{xT})^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha'} = 0.$$

Це рівняння є алгебраїчним:

$$\frac{v_0}{\sin \alpha} + v_{xT} \operatorname{ctg} \alpha + v_{yT} = -\frac{1}{\lambda_0}. \quad (4)$$

З цього рівняння слід знайти $\alpha(x)$ за умови, що $0 \leq \alpha(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

Якщо $v_{xT} = v_{yT} = 0$, то з рівняння (4) отримаємо:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{1}{\lambda_0 v_0} - \frac{v_{yT}}{v_0}.$$

З цього рівняння випливає, що прямолінійний шлях вже не буде оптимальним. Величина λ_0 визначається з умови (3).

Тепер поставимо задачу мінімізації витрат пального, якщо задано час руху T до заданого пункту $B(x_0, y_0)$. Для обчислення витрат палива

скористаємося формулою $q = \gamma v^3 = \gamma(S) \left(\frac{dS}{dt} \right)^3$. Нехай $\gamma = \text{const} = 1$.

Тоді $q = v_0^3$. Повні витрати

$$G = \int_0^T q dt = \int_0^T v_0^3 dt. \quad (5)$$

Отже, отримана задача: знайти функції $\alpha(x)$ і $v_0(x)$ так, щоб інтеграл (5) набував найменшого значення за умови (2), (3). Це задача на умовний екстремум з інтегральними зв'язками (2), (3). Інтеграл (5) можна записати у вигляді

$$G = \int_0^T v_0^3 dt = \int_0^{x_0} \frac{v_0^3}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} dx. \quad (6)$$

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$F = \frac{v_0^3}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} + \lambda_1 \frac{1}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}} + \lambda_2 \frac{v_0 \sin \alpha + v_{yT}}{v_0 \cos \alpha + v_{xT}}. \quad (7)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функцій $\alpha(x)$ і $v_0(x)$ також будуть алгебраїчними:

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial t} = 3v_0^3 \operatorname{ctg} \alpha + 3v_0^2 v_{xT} \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{v_0^3}{\sin \alpha} - \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha + \lambda_2 v_{xT} - \lambda_2 v_{yT} \operatorname{ctg} \alpha = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_0(x)}{\partial t} = v_0^3 + \lambda_1 + \lambda_2 v_0 \frac{1}{\sin \alpha} + \lambda_2 v_{xT} \operatorname{ctg} \alpha + v_{yT} = 0. \quad (9)$$

З отриманої системи рівнянь можна знайти $\alpha(x)$ і $v_0(x)$. До рівнянь (8), (9) слід приєднати умови (2), (3), з яких можна знайти λ_1, λ_2 . Зауважимо, що цю систему можна розв'язати лише чисельними методами.

Література:

1. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Київ : ВПЦ «Київський університет». 2009. 380 с.