

SECTION 11. TRANSPORT

DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-612-6-15>

DIFFERENTIAL MODELS OF SOME NAVIGATION PROBLEMS

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ СУДНОПЛАВСТВА

Sokolovska H. V.

*Senior Lecturer at the Department
of Higher mathematics,
Odesa National Maritime University
Odesa, Ukraine*

Соколовська Г. В.

*старший викладач кафедри «Вища
математика»,
Одеський національний морський
університет
м. Одеса, Україна*

Математичне моделювання є потужним інструментом при вирішенні питань мінімізації затрат на морські перевезення, підвищення їх безпеки [1]. Задачі оптимізації маршрутів, керування швидкістю судна та вибору найбільш економічного режиму роботи силової установки набувають особливого значення при проведенні пошуково-рятувальних та морських військових операцій. Це обумовлює важливість задач з практичним змістом в математичній підготовці інженерів морської галузі [2]. Розглянемо деякі задачі, що зводяться до дослідження диференціальних рівнянь.

Судно, водотоннажність якого $P=1500\text{ Т}$, долає опір води $R=\alpha v^2$, $\alpha=0,12$, m – маса судна, v – його швидкість. Сила упору гвинтів напрямлена у бік руху й задовольняє рівність $T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)$, ($T_0=120\text{ Т}$ – сила упору гвинтів, коли корабель не рухається, $v_s=\text{const}=33\text{ м/с}$). Знайти залежності:

- 1) швидкості судна від часу, якщо початкова швидкість дорівнює v_0 ;
- 2) пройденого шляху від швидкості;
- 3) шляху від часу при початковій швидкості $v_0=10\text{ м/с}$.

Нехай x – пройдений шлях, тоді $v = \frac{dx}{dt}$ – швидкість, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення. Проектуючи всі діючі сили на горизонталь з урахуванням їх напрямів, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - T_0 \left(1 - \frac{1}{v_s} \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

або рівняння першого порядку:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v^2 - T_0 \left(1 - \frac{v}{v_s} \right) = 0 \quad (1)$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$-\frac{m}{\alpha} \int \frac{dv}{v^2 + \frac{vT_0}{\alpha v_s} - \frac{T_0}{\alpha}} = \int dt,$$

$$-\frac{m}{2\sqrt{T_0\left(\alpha + \frac{T_0}{4v_s^2}\right)}} \ln \left| \frac{\alpha v + \frac{T_0}{2v_s} - \sqrt{T_0\left(\alpha + \frac{T_0}{4v_s^2}\right)}}{\alpha v + \frac{T_0}{2v_s} + \sqrt{T_0\left(\alpha + \frac{T_0}{4v_s^2}\right)}} \right| = t + C, \quad C -$$

довільна стала.

$$\sqrt{T_0\left(\alpha + \frac{T_0}{4v_s^2}\right)} = \beta.$$

Введемо позначення:

Скористаймося

початковими умовами: $v = v_0$ при $t = 0$, одержимо:

$$C = -\frac{m}{2\beta} \ln \left| \frac{\alpha v_0 + \frac{T_0}{2v_s} - \beta}{\alpha v_0 + \frac{T_0}{2v_s} + \beta} \right|.$$

Розв'язок задачі Коші:

$$t = \frac{m}{2\beta} \ln \left| \frac{\left(\alpha v + \frac{T_0}{2v_s} + \beta\right)\left(\alpha v_0 + \frac{T_0}{2v_s} - \beta\right)}{\left(\alpha v + \frac{T_0}{2v_s} - \beta\right)\left(\alpha v_0 + \frac{T_0}{2v_s} + \beta\right)} \right|.$$

Згідно з умовами задачі $\beta = 4,2, \frac{T_0}{2v_s} = 1,8, \frac{2\beta}{m} = 0,055$. Тоді шуканий

$$\frac{(v+50)(v_0-20)}{(v-20)(v_0+50)} = e^{0,055t}$$

розв'язок можна записати у вигляді

$$v = \frac{70v_0 + 20(v_0 + 50)(e^{0,055t} - 1)}{70 + (v_0 + 50)(e^{0,055t} - 1)} \quad (2)$$

Для знаходження залежності пройденого шляху від швидкості

$$\frac{mdv}{\alpha v^2 + \frac{T_0 v}{v_s} - T_0} = -dt$$

потрібно записати рівняння (1) у вигляді

помножити на v обидві частини та замінити у правій частині v на $\frac{dx}{dt}$.
Маємо рівняння:

$$\frac{mvdv}{\alpha v^2 + \frac{T_0 v}{v_s} - T_0} = -dx$$

Його загальний розв'язок:

$$-x + C = \frac{m}{2\alpha} \ln \left| \left(\frac{v + \gamma}{\sqrt{\delta}} \right)^2 - 1 \right| + \frac{m\gamma}{2\alpha\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{v + \gamma + \sqrt{\delta}}{v + \gamma - \sqrt{\delta}} \right|$$

$$\gamma = \frac{T_0}{2\alpha v_s} = 15 \quad \delta = \frac{T_0}{\alpha} \left(1 + \frac{T_0}{4\alpha v_s^2} \right) = 1225$$

Тут γ м/с, δ м/с. Підставимо

початкові умови $x|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = v_0$.

$$C = \frac{m}{2\alpha} \ln \left| \left(\frac{v_0 + \gamma}{\sqrt{\delta}} \right)^2 - 1 \right| + \frac{m\gamma}{2\alpha\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{v_0 + \gamma + \sqrt{\delta}}{v_0 + \gamma - \sqrt{\delta}} \right|$$

Тоді або

$$C = 637,5 \ln \left| \left(\frac{v_0 + 15}{35} \right)^2 - 1 \right| + 273,9 \ln \left| \frac{v_0 + 50}{v_0 - 20} \right|$$

Отже, залежність пройденого шляху від швидкості визначається рівністю:

$$x = 637,5 \ln \left| \frac{(v_0 + 15)^2 - 1225}{(v + 15)^2 - 1225} \right| + 273,9 \ln \left| \frac{(v_0 + 50)(v - 20)}{(v_0 - 20)(v + 50)} \right|.$$

Тепер знайдемо залежність пройденого шляху від часу при початковій швидкості $v_0 = 10$ м/с. Рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$dx = \frac{70v_0 + 20(v_0 + 50)(e^{0,055t} - 1)}{70 + (v_0 + 50)(e^{0,055t} - 1)} dt = \frac{1200e^{0,055t} - 50}{60e^{0,055t} + 10} dt$$

та проінтегруємо.

$$x + C = \int \left(20 - 70 \cdot \frac{1}{6e^{0,055t} + 1} \right) dt \Leftrightarrow x + C = 20t - 70 \int \frac{dt}{6e^{0,055t} + 1}.$$

У цьому інтегралі виконаємо заміну змінної за формулою $u = e^{0,055t}$. Одержимо:

$$x + C = 20t - \frac{70}{0,055} \ln \frac{e^{0,055t}}{e^{0,055t} + \frac{1}{6}}.$$

Підставимо початкову умову $x|_{t=0} = 0$, маємо:

$$C = -\frac{70}{0,055} \ln \frac{6}{7}.$$

Отже, залежність шляху від часу має вигляд:

$$x = 20t + \frac{70}{0,055} \ln \frac{6e^{0,055t} + 1}{7e^{0,055t}}.$$

Отримані результати можуть бути використані при виборі найбільш ефективного методу керування судном.

Література:

1. Соколовська Г. В. Математичні моделі деяких задач судноплавства та гідротехнічного будівництва. *Таврійський науковий вісник*. 2024. Вип. 6. С. 248–253.
2. Сиваш С. Б., Соколовська Г. В. Особливості викладання математики у технічному університеті в сучасних умовах. *Наука і техніка сьогодні*. 2023. № 9(23). С. 437–450.