

---

## ЕНТРОПІЙНО-ТОПОЛОГІЧНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМ

---

Волошин В. С., Кленін О. В.

DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-653-9-21>

### Вступ

Сучасні моделі складних систем дедалі частіше потребують виходу за межі класичних адитивних та орієнтовних уявлень<sup>1,2,3</sup>. Багатокомпонентні складні системи – техногенні, природні, штучні та гібридні – характеризуються нелінійними взаємодіями, ієрархічністю, а також конкуренцією процесів самоорганізації та дезорганізації. За таких умов навіть нові ентропійно-матричні моделі<sup>4</sup> виявляються недостатніми для опису подібних систем, зокрема через те, що перехресні взаємодії в топологічних схемах, як правило, зводяться до множинних і несумірних відношень, внески окремих (наприклад, термодинамічних) властивостей системи можуть мати протилежні знаки, а їх інтегральні характеристики залежать від обраного способу аналізу.

Ентропійний аналіз, доповнений топологічними методами, дає змогу виявляти приховані закономірності самоорганізації, компенсації та структурної інверсії, які не спостерігаються в традиційних матричних моделях. Запропонована автором раніше шарувата модель двокомпонентних систем<sup>4</sup> на основі ентропійно-структурованих матриць суміжності в цій роботі геометризується у вигляді двовимірної топологічної моделі, зокрема циліндра. Робота спрямована на строгу формалізацію переходу від цієї орієнтовної поверхні до неорієнтовної, співвідносно, наприклад,

---

<sup>1</sup> Kivelä M., Arenas A., Barthelemy M. at all. Multilayer Networks. *Physics Reports*, Vol.544, Issues 1-2, 2014. pp.1-12

<sup>2</sup> Jaynes E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, Vol. 106, No. 4, 1957, P. 622.

<sup>3</sup> Munkres J.R. Topology. Prentice Hall, *Upper Saddle River*, 2000, pp. 122-125.

<sup>4</sup> Волошин В. С., Ткаленко І. А. Методика оцінки ефективності опосередкованих компліментарних систем. Зб. праць VII науково-практ. конф. «Безпека енергетики в епоху цифрової трансформації». ПІМЕ ім. Пухова, Київ, 2025. С. 51.

із властивостями неорієнтовних розшарувань включає деякі топологічні поверхні, а також на введення математичного оператора, що описує знакову інверсію ентропійних внесків у розвитку складної системи. Стандартний арсенал при класифікації таких двовимірних многовидів під час побудови неорієнтовних розшарувань включає топологічні поверхні, зокрема «пляшку Кляйна» (Klein bottle)<sup>5</sup>, крос-кап (cross-cap) – локальну модель «вкладки» проєктивної площини<sup>6</sup>, а також смуги з непарною кількістю півобертів як сімейство антиперіодичних за знаком смуг.

Цю роботу присвячено дослідженню складних багатокомпонентних динамічних систем за допомогою узагальненої ентропійно-топологічної моделі багатокомпонентних складних систем на основі вже отриманих закономірностей і підходів до аналізу двокомпонентних систем. Для цього запроваджується формалізований підхід із використанням послідовних багатовимірних матриць суміжності та інцидентності як похідних моделей гіперграфів і симпліціальних комплексів. Показано, що ентропійна декомпозиція за ортогональними властивостями приводить до природної інтерпретації таких систем у вигляді багатовимірних циліндричних розшарувань. За наявності антиперіодичних знакових умов доведено необхідність переходу до неорієнтовних топологій, які узагальнюють різні моделі згаданих вище топологічних поверхонь для багатовимірних випадків. Уведено оператор багатовимірної знакової інверсії, пов'язаний із глобальною топологією простору станів системи.

## 1. Ентропійно-топологічна модель простих двокомпонентних систем

**Матеріали та методи.** Перш ніж перейти до розв'язання узагальненої задачі щодо основного предмета дослідження – багатокомпонентних складних систем, – розглянемо простіші, двокомпонентні системи з метою апробації на них базових математичних і топологічних механізмів опису та аналізу з подальшим перенесенням отриманих результатів на головний об'єкт дослідження<sup>7</sup>.

Методологічною основою дослідження є метод аналізу складних систем за допомогою ентропійно структурованих матриць суміжності як похідної моделі опису їх полікомпонентності. Базовим обчислювальним ядром моделі є ентропійно-насичена багатовимірна матриця суміжності. Концептуальною основою моделі виступає багатшаровість

<sup>5</sup> Hatcher A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. pp. 101–114.

<sup>6</sup> Spanier E.H. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, New York, 1966. pp. 312–318

<sup>7</sup> Edelsbrunner H., Harer J. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, Providence, 2010. pp. 124–125.

багатокомпонентної системи та суперпозиційність кінцевої ентропії, що забезпечує варіабельність системи й багатоваріантність можливих рішень. Це досягається шляхом покрокового визначення ентропії кожного вузла матриці суміжності за заданими властивостями системи, зокрема: структурованістю, інформаційною насиченістю, функціональністю, фізико-хімічними характеристиками, поверхневими явищами (включно з надсистемою), здатністю до термодинамічної нерівноважності та кінетичності, тощо – залежно від природи конкретної системи.

Результати математичного моделювання ентропійно структурованих багатовимірних матриць суміжності та запропонованого методу мінімаксних функцій було зіставлено з відомими складами металургійних рециклінгових брикетів, опублікованими у фаховій науковій літературі<sup>8</sup>.

**Вихідна постановка задачі.** Розглянемо множину вихідних компонентів  $\{b_p\}$ ,  $p = 1, \dots, P$ , з яких формуються двокомпонентні системи вигляду  $b_{(p,q)}$ ,  $p \neq q$ . Найпростіша двокомпонентна система  $b_{(p,q)}$  інтерпретується як якісно новий об'єкт, що володіє власними властивостями, які не зводяться до простого підсумовування властивостей окремих компонентів. У зв'язку з цим множина

вихідних компонентів і множина двокомпонентних систем вважаються логічно та онтологічно різними.

Взаємодії між компонентами описуються квадратною симетричною матрицею суміжності, в якій ураховуються лише недіагональні елементи  $p \neq q$ , діагональні елементи  $b_{(p,p)}$  виключаються як такі, що не відповідають поняттю системи. При цьому зберігається симетрія ролей компонентів  $b_{(p,q)} = b_{(q,p)}$ . Кожна комірка матриці у вигляді  $b_{(p,q)}$  характеризується цілком визначеною якістю – власною інтегральною ентропією  $S_{(p,q)}^{(i)total}$  та відповідною зміною ентропії

$$\pm \Delta S_{p,q}^{(i)} = S_{(p,q)}^{(i)total} - (S_p^{(i)} + S_q^{(i)}), \quad (1)$$

яка відповідає переходу від стану окремих компонентів до стану двокомпонентної системи. Знак «+» у цьому випадку відповідає зростанню інтегральної ентропії системи, тоді як знак «-» означає зниження інтегральної ентропії системи. Матриця суміжності такої системи може бути подана в наступному вигляді

<sup>8</sup> Волошин В. С., Ткаленко І. А. Методика оцінки взаємодії металургійних відходів при їх рециклінгу. Вчені записки Таврійського університету ім. В. І. Вернадського. Т.36(75), № 4, Ч.1, 2025. С.193.

$b_p / b_q$	$b_1$	$b_2$	...	$b_p$	...
$b_1$	$b_{1,1}$	$b_{2,1}, S_{2,1},$ $\pm \Delta S_{2,1}$	...	$b_{p,1}, S_{p,1},$ $\pm \Delta S_{p,1}$	...
$b_2$	$b_{1,2}, S_{1,2},$ $\pm \Delta S_{1,2}$	$b_{2,2}$	...	$b_{p,2}, S_{p,2},$ $\pm \Delta S_{p,2}$	...
...	...	...	...	...	...
$b_p$	$b_{1,p}, S_{1,p},$ $\pm \Delta S_{1,p}$	...	...	$b_{p,q}$	...
...	...	...	...	...	...

Інтегральна ентропія кожної комірки  $b_{(p,q)}$  двокомпонентної системи має суперпозиційний характер і обчислюється як

$$S_{(p,q)}^{total} = \sum S_{(p,q)}^i, \quad (2)$$

де індекс  $i$  позначає ортогональні шари властивостей системи, що відповідають різним аспектам її організації, зокрема функціональному, компонентному, конфігураційному, інформаційному, структурному, термодинамічному (ентропія змішування), фізико-хімічному, геометричному та іншим ознакам (якостям) залежно від природи самої системи.

Такий підхід повністю відповідає концепції узагальненої ентропії, узгоджується з принципом Джейнса (*MaxEnt*) і є методологічно обґрунтованим для аналізу складних техногенних і природних систем. Аналогічно визначається зміна ентропії під час переходу від окремих компонентів до системи:

$$\Delta S_{(p,q)}^{total} = S_{(p,q)}^{total} - (S_p + S_q) = \sum_{i=1}^N \Delta S_{(p,q)}^i. \quad (3)$$

Знак кожної величини  $\Delta S_{(p,q)}^i$  інтерпретується таким чином:

$\Delta S_{(p,q)}^i > 0$  – опосередкована дезорганізація за  $i$ -ю властивістю;

$\Delta S_{(p,q)}^i < 0$  – опосередкована самоорганізація за  $i$ -ю властивістю.

Важливо підкреслити, що для однієї й тієї самої системи допускається одночасне співіснування додатних і від'ємних внесків за різними ортогональними властивостями.

Таким чином, сутність предмета дослідження – а саме двокомпонентних систем – пов’язується не лише з ієрархічними взаємодіями, що описуються шаруватими матрицями суміжності, коли кожен аналітичний «шар» взаємодіє з параметрами інших шарів, а й із топологічними закономірностями, які інтегральна ентропія вносить у систему. Слід вважати, що такі закономірності формуються в складній системі як її внутрішні властивостями – через унікальні для неї величини  $\Delta S_{(p,q)}^i$ , так і зовнішніми впливами, різноманіття яких практично неможливо повністю врахувати для будь-якої складної системи.

Запропонована методика дослідження дала змогу розширити область застосування від двовимірних матриць суміжності для моделей двокомпонентних систем до багатовимірних матриць для моделей багатокомпонентних систем – залежно від компонентності вихідної складної системи.

Аналіз значного обсягу вихідної інформації, що стосується дослідження багатокомпонентних матриць суміжності, а також очевидна неоднозначність поведінки ентропії  $S_{(p,q)}^i$ , як смислового наповнювача багатовимірних матриць суміжності, у поєднанні зі складнощами, пов’язаними з відповідними розрахунками, зумовлюють необхідність застосування до них закономірностей неорієнтованих просторів. Зокрема, це стосується поняття «носія системи» як узагальненого показника її складності.

Під «носієм системи» будемо розуміти будь-яке опосередковане середовище (матеріальне або абстрактне), яке задає простір можливих станів системи, причому її складність може бути кількісно оцінена через відповідну форму складових інтегральної ентропії (2) залежно від ступеня структурної впорядкованості системи (таблиця 1).

Таблиця 1

**Зіставлення «носія системи» з її термодинамічними та структурними властивостями**

Тип носія	Предмет носія	Зв’язана форма ентропії	Вплив на складність
Фізичний носій	Матеріал, енергія. Фізичне середовище,	Термодинамічна ентропія	Задає фізичні обмеження та стійкість складної системи
Інформаційний носій	Пам’ять, код, дані ДНК, маш код, нейронні паттерни	Інформаційна ентропія Шеннона	Чим вище різноманітність станів, що кодуються, тим вище потенційна складність

## Продовження таблиці 1

Структурний носій	Мережа зв'язків, топологія, архітектура (графи ієрархічної мережі)	Структурна ентропія (ентропія неорієнтованого графу)	Визнає складність взаємодій, емерджентність
Динамічний носій	Закони зміни станів, динамічні процеси	Ентропія поведінки (динамічна ентропія)	Складна динаміка підвищує непередбачуваність і варіативність
Функціональний носій	Функції, алгоритми, протоколи правила	Функціональна ентропія	Підвищують кількість можливих функцій

Кількість ступенів свободи умовного «носія» безпосередньо впливає на складність поведінки системи. У цьому випадку складність є пропорційною кількості можливих станів. Неоднорідність умовного «носія» створює можливості для формування складних інтегративних механізмів. При цьому зростає структурна складність (наявність багатьох різнорідних частин, різних типів зв'язків, ускладненої функціональності). Складність «носія» визначає мінімальну складність моделі, здатної адекватно його описувати. Складність системи є пропорційною мінімальній довжині її моделі (за аналогією з колмогорівською алгоритмічною складністю). Тобто складний носій робить прості моделі недостатніми, а отже, сама система представляється, як складна.

Таким чином, «носії системи» може слугувати показником її складності через ентропійні параметри, зокрема для  $S_{total}$  (2):

- він може задавати кількість ступенів свободи  $S_{surf}$ ;
- визначати множину можливих структурних станів  $S^{comp}$ ;
- виступати інформаційним носієм  $S_{conf}$  через зв'язок із формулою

Шеннона;

- вимагати складних механізмів керування та взаємодії;
- неминуче ускладнювати модель системи та допускати складні динамічні режими (нелінійність, емерджентність)  $S_{proc}$ .

«Носій системи» визначає обмеження та можливості системи: енергетичні, інформаційні, структурні, функціональні, еволюційні. У кожному з цих випадків можна оцінювати відповідну форму ентропії – термодинамічну, інформаційну, структурну, поведінкову, еволюційну.

Для більш точного розуміння роботи моделі розглянемо її поведінку на прикладі двокomпонентних систем та їх відображення у двовимірних матрицях суміжності.

Якщо для кожного індексу  $i$  (властивості-шару) будується власна двовимірна матриця суміжності, що містить значення  $\Delta S_{(p,q)}^i$

, то кожна з таких матриць матиме однакову топологію зв'язності, тобто ідентичний набір допустимих пар  $(p, q)$ , відрізняючись лише величинами ентропійних внесків, у тому числі, з боку «носія системи». Сукупність таких матриць утворює шарувату ентропійну структуру, вбудовану в надсистему та природно інтерпретовану як багатовимірний багатокomпонентний об'єкт.

Розглянемо множину двокомпонентних систем  $b_{(p,q)}, p \neq q$ , та множину ортогональних ентропійних внесків  $S_{(p,q)}^i$ , індексованих їх властивостями (шарами)  $i=1, \dots, N$ , у вигляді топологічної моделі шаруватої ентропійної структури у формі циліндра. Параметричне подання циліндра як «носія системи» має вигляд

$$C = \{(x, i) \mid x \in X, i \in [0, N]\}, \quad (4)$$

де  $X$  – дискретна множина двокомпонентних систем  $b_{p,q}$ , а координата її «носія системи» відповідає порядку ортогонального ентропійного внеску.

На рис. 1 подано відповідну шарувату ентропійну матрицю суміжності, яка геометрично є еквівалентною циліндричній поверхні. Періодичність знакової структури за координатою шарів забезпечує глобальну орієнтованість та впорядкованість ентропійних внесків. На поверхні циліндра завжди визначена функція знаку зміни ентропії

$$\sigma: C \rightarrow \{-1, +1\} = \text{sign}(\Delta S_{(p,q)}^i) \in \{\pm\}. \quad (5)$$

Такий циліндр є орієнтовною поверхнею, оскільки для нього існує глобально неперервне поле нормалей, і під час обходу замкненої траєкторії орієнтація системи зберігається.

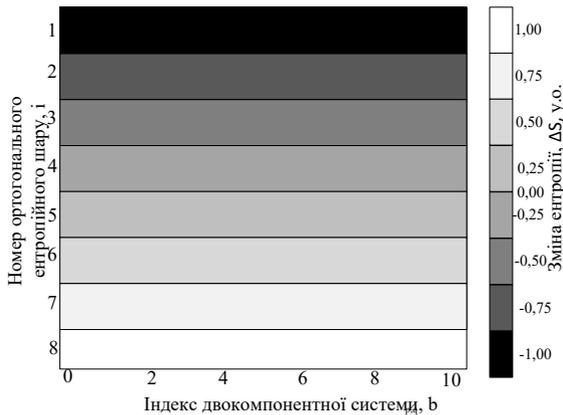
Розгортка такої циліндричної поверхні (див. рис. 1) на площину є еквівалентною розгляду прямокутної області  $\mathcal{R} = X \times [0, N]$ . Для циліндра ідентифікація граничних ліній має вигляд:  $(x, 0) \sim (x, N)$ . Такий варіант аналізу системи є коректним за умови плавної та двовимірної орієнтації параметрів системи (у цьому випадку –  $\Delta S_{(p,q)}^i$  для кожної наступної властивості-шару).

Ми також маємо право розглядати випадок, коли має місце зміна знаку  $\text{sign}(\Delta S_{(p,q)}^i)(\pm)$ . Це є особливим випадком у стані інтегральної ентропії конкретної системи  $b_{(p,q)}$ , за якого її складові змінюють свою поведінку на

користь різко протилежного знаку. Наприклад, якщо для знакової функції виконується умова

$$\sigma\{x, 0\} = -\sigma(x, N), \quad (6)$$

то класична циліндрична ідентифікація «носія системи» стає топологічно некоректною, оскільки порушується узгодженість орієнтації знаку під час замикання системи.



**Рис. 1. Багатошарова циліндрична ентропійна структура (орієнтований варіант)**

Розгортка поверхні циліндра на площину в цьому випадку призводить до появи матриці інцидентності, рядки якої відповідають ортогональним ентропійним внескам (властивостям-шарам)  $i$ , а стовпці – двокомпонентним системам  $b_{(p,q)}$ .

Ілюстрація табличної форми (фактологічної моделі) у вигляді топологічної циліндричної структури наведена нижче. Якщо такий циліндр розгорнути на площину, отримаємо матрицю інцидентності як похідну від початкової матриці суміжності типу

$b_{p,q}$ $\pm \Delta S_{p,q}^{\text{total}}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	...	$b_{p,q}$	...	$b_{p,Q}$
$\pm S_{1,1}^{\text{total}}$	$+\Delta S_{1,1}^{\text{total}} *$	$+\Delta S_{1,2}^{\text{total}} *$	...	$-\Delta S_{p,q}^{\text{total}} *$	...	$+\Delta S_{p,Q}^{\text{total}} *$

$\pm\Delta S_{p,q}^{i=1}$	$-\Delta S_{1,1}^{i=1} *$	$+\Delta S_{1,2}^{i=1} *$	...	$-\Delta S_{p,q}^i$	...	$-\Delta S_{p,Q}^{i=N}$
...	...	...	...	...	...	...
$\pm\Delta S_{p,q}^i$						
...	...	...	...	...	...	...
$\pm\Delta S_{p,q}^{i=N}$	$+\Delta S_{1,1}^{i=N} *$	$-\Delta S_{1,2}^{i=N}$	...	$+\Delta S_{p,q}^{i=N}$	...	$+\Delta S_{p,Q}^{i=N}$

Тут позначка (\*) вказує на оціночне значення за знаком  $\pm\Delta S$ . У матриці інцидентності можна не наводити числові значення  $\Delta S$ , обмежуючись лише топологічним знаком: «+» або «-». Якщо для такої матриці враховувати виключно її якісний аспект, то вона набуває топологічної форми розгорнутого циліндра такого вигляду

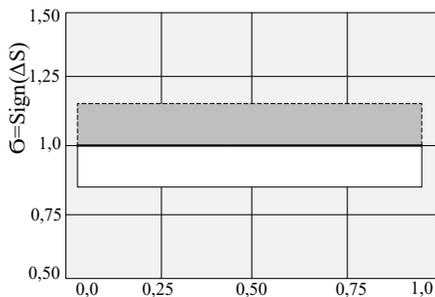
$b_{p,q}$ $\pm\Delta S_{p,q}^{i=1,1,N}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	...	$b_{p,q}$	...	$b_{p,Q}$
$S_{1,1}^{total}$	Зростає	Зростає	...	Знижується	...	Зростає
$\pm\Delta S_{p,q}^{i=1}$	-	+	...	-	...	-
...	...	...	...	...	...	...
$\pm\Delta S_{p,q}^i$						
...	...	...	...	...	...	...
$\pm\Delta S_{p,q}^{i=N}$	+	-	...	+	...	+

де знаком «+» позначені комірки, у яких відбувається зростання інтегральної ентропії  $S_{p,q}^{total}$ , а зміна ентропії її  $i$ -х складових  $\pm\Delta S_{p,q}^i$  є додатною; натомість у комірках зі знаком «-» спостерігається зниження інтегральної ентропії, а зміна ентропії її  $i$ -х складових є від'ємною.

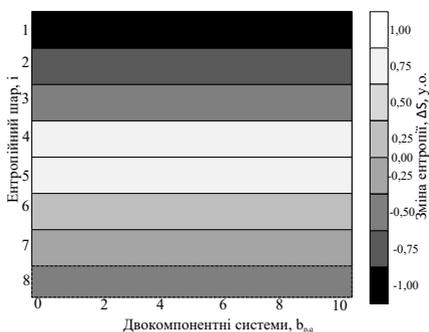
У поданій формі використовуються виключно знаки без числових значень визначальних параметрів, чим підкреслюється топологічний характер аналізу. Інтерпретація рядків як інтегрального ефекту від  $\pm\Delta S_{p,q}^{total}$ , а також окремих ортогональних внесків  $\pm\Delta S_{p,q}^i$ , повністю узгоджується з раніше прийнятою методикою декомпозиції ентропії та є коректним підходом для виявлення областей самоорганізації й дезорганізації в системі, а також для топологічної класифікації станів.

На рис. 2 показано поведінку знакової функції ентропійного внеску під час обходу замкненої траєкторії на орієнтовній поверхні. Початкове та кінцеве значення збігаються, що відображає відсутність топологічної інверсії. З огляду на те, що конфігурація матриці інцидентності може

містити цілі області, у яких значення знаків  $\pm\Delta S_{p,q}^i$  у комірках є додатними або, навпаки, від'ємними – залежно від властивостей конкретної двокомпонентної системи, – можна очікувати, що така топологія поєднується із закономірностями неорієнтованих топологічних систем та їх властивістю антиперіодичності. У цьому випадку під час руху вздовж умовного скрученого циліндра орієнтація (у даному випадку за знаками комірки) змінюється на протилежну. Така інтерпретація може забезпечити нові описи властивостей і закономірностей для кожної з вихідних двокомпонентних систем.



**Рис. 2.** Збереження знаку ентропійного внеску під час обходу замкненої траєкторії на орієнтовній циліндричній поверхні моделі (після обходу фундаментального циклу  $(\sigma(1) = \sigma(0))$ )



**Рис. 3.** Розгортка інверсного циліндра (прямокутна ентропійна область) та антиперіодичність знакової функції як топологічна некоректність для циліндра

Інверсна розгортка циліндра у прямокутну область демонструє порушення знакової узгодженості за антиперіодичними граничними умовами. Така конфігурація є несумісною з циліндричною ідентифікацією та потребує зміни топології (рис. 3).

Строгий перехід до неорієнтованих топологічних моделей відбувається у випадку, коли в матриці інцидентності формуються протяжні області зі зміненими та стійкими знаковими конфігураціями. У такій ситуації виникає необхідність їх інтерпретації в термінах неорієнтовних поверхонь. Зокрема, за умови, що під час руху вздовж умовної траєкторії по поверхні циліндра відбувається зміна орієнтації, або інверсія знаку  $sign(\Delta S_{(p,q)}^i) \in \{\pm\}$ , або ж модель природним чином узгоджується з топологією стрічки Мьобіуса (як більш наочного прикладу), що володіє властивістю антиперіодичності.

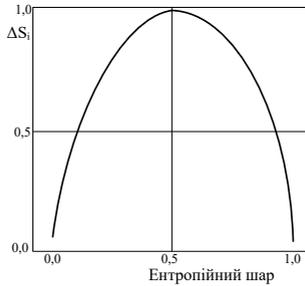
У цьому випадку знак ентропійного внеску стає локально залежним від його шляху, а система демонструє не класичну адитивність і топологічно зумовлену ентропійну спряженість, а інверсну поведінку з вираженою антиперіодичністю за шарами (властивостями системи). Це вказує на ідентифікацію деяких топологічних поверхней із властивостями неорієнтовних розшарувань  $(x,0) \sim (\tau(x), N)$ , де  $\tau: X \rightarrow X$  – тотожне або симетричне відображення (у найпростішому випадку  $\tau(x) = x$ ) з обов'язковою інверсією орієнтації.

Таке топологічне просторове утворення, позначене як  $M = \mathcal{R} / \sim$ , є неорієтовним і гомеоморфним до відомих моделей на кшталт стрічки Мьобіуса. Отже, топологічна поверхня постає тут не як геометрична метафора, а як строго необхідний топологічний об'єкт, що забезпечує узгодженість знакової структури параметрів системи за антиперіодичних умов. Система після одного повного обходу надає  $\dot{A} \rightarrow -\dot{A}$ , а після другого повного обходу повертається до  $\dot{A} \rightarrow \dot{A}$ . Але можуть бути і повторні шляхи. При цьому простір  $M$  реалізується не як локальна операція, а як глобальний топологічний ефект.

Профіль ентропійного внеску вздовж координати шарів задовольняє умовам антиперіодичності, за якої значення на протилежних межах мають протилежні знаки (рис. 4). Це є формальною умовою неорієтовної топології.

З урахуванням того, що вихідні дані для такого аналізу передбачали знеособлені матриці інцидентності, які не включають процедурних параметрів аналізованої системи, введемо оператор знакової інверсії, визначений як

$$\mathcal{L}: \Delta S_{(p,q)}^i \mapsto -\Delta S_{(p,q)}^i. \quad (7)$$

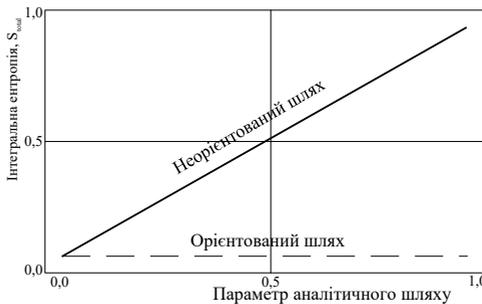


**Рис. 4. Антиперіодичність ентропійного внеску як умова неорієнтовної топології (ключова умова інверсності системи)**

У знаковому поданні:  $\mathcal{L}:(\sigma) \mapsto -\sigma$ . Оператор  $\mathcal{L}$  має такі властивості:

- інволютивність,  $\mathcal{L}^2 = \text{Id}$  ;
- топологічна зумовленість, оператор  $\mathcal{L}$  реалізується під час обходу фундаментального циклу неорієнтовної поверхні (наприклад, модель «вкладки» проективної площини, смуги з непарною кількістю півобертів та ін.);
- нелокальність, дія оператора визначається глобальною траєкторією, а не локальним станом окремої комірки.

Запропонований підхід дає змогу поєднати ентропійний аналіз і топологічне моделювання, забезпечує строгу математичну інтерпретацію для багатоконпонентних складних систем широкого класу, дозволяє масштабувати модель від двокомпонентних до багатоконпонентних систем за єдиними закономірностями та виявляти приховані механізми самоорганізації, недоступні в класичних адитивних моделях.



**Рис. 5. Залежність інтегральної ентропії системи від топології шляху аналізу**

Застосування знакових матриць інцидентності та неорієнтовних поверхонь відкриває перспективи якісно нового опису складних систем, зокрема техногенної та природничо-наукової природи. Порівняння поведінки інтегральної ентропії для орієнтовного та неорієнтовного шляхів аналізу показує, що в другому випадку інтегральна ентропія залежить від глобальної топологічної траєкторії, а не лише від стану системи (рис. 5). Таким чином, інверсія знаку ентропійного внеску є не обчислювальним, а топологічним ефектом.

Отримані результати дозволяють по-новому інтерпретувати процеси самоорганізації та дезорганізації в складних системах. Зокрема, ситуація, коли інтегральна ентропія системи залежить від шляху аналізу, а не лише від її стану, отримує природне пояснення через неорієнтовану одновимірну топологію. Такий підхід є особливо перспективним для дослідження багатокомпонентних складних систем, техногенних ієрархічних систем, систем із конкуруючими механізмами впорядкування тощо.

Таким чином, у роботі чітко показано, що перехід від строго орієнтованих до неорієнтованих ентропійно-топологічних моделей складних систем є математично обґрунтованим і фізично осмисленим, а також допустимим для опису більш складних систем. Введення оператора знакової інверсії розширює клас допустимих моделей і дозволяє враховувати антиперіодичні ефекти, принципово недоступні в орієнтованих просторах.

## 2. Ентропійно-топологічна модель багатокомпонентних складних систем

У цій частині роботи ми розглядаємо моделі, порівнянні з правилами, викладеними при моделюванні двокомпонентних систем, як похідних від ентропійно-топологічної моделі двокомпонентних систем, заснованих на шарових матрицях суміжності та циліндричній топології з можливим переходом до неорієнтованих топологій. Мета цього дослідження – строго узагальнити цей підхід на багатокомпонентні системи та показати, що використовувана двоїста, за властивостями, топологія природно розширюється до багатовимірних неорієнтованих многовидів.

Розглянемо багатокомпонентні складні системи у їх гіперграфовому представленні<sup>9</sup>. Задаємо множину вихідних компонентів  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ . Багатокомпонентна система порядку  $k$  визначається як  $b_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}, p_i \neq p_j \dots \neq p_k$ .

Таке описання природно відповідає гіперграфу, де вершинами графа є компоненти  $b_p$ , а гіперребра – власне багатокомпонентні

<sup>9</sup> Diestel R. Graph Theory. Springer, Berlin–Heidelberg, 2017. pp.181-190

системи  $b_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$ . Це дозволяє принципово розширити парну матрицю суміжності до багатовимірного об'єкта, здатного представляти багатовимірну матрицю суміжності у тензорному записі.

Введемо тензор суміжності порядку  $k$ :

$$A_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}, \quad (8)$$

кожен ненульовий елемент якого відповідає існуванню системи  $b_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$ . Кожній такій системі співставляється інтегральна ентропія:  $S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^{\text{total}} = \sum S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i$ , та зміна ентропії

$$\pm \Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^{\text{total}} = S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^{\text{total}} - \sum_j^k S_{p_j}. \quad (9)$$

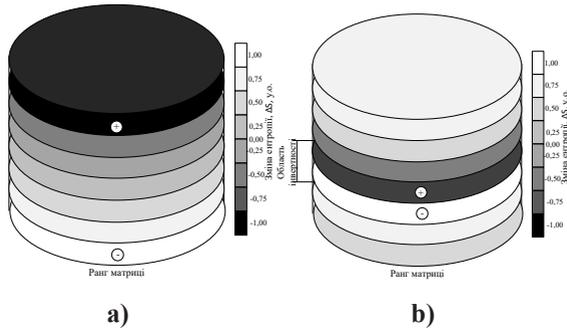
Приведемо умови збереження ортогональної ентропійної декомпозиції, аналогічні двовимірним системам. Для цього приймемо умову, відповідно до якої індекс шаруватості  $i$  зберігає попереднє значення ортогональних вкладок властивостей складної системи, включно зі структурними, інформаційними, конфігураційними, термодинамічними, фізико-хімічними, геометричними та іншими, залежно від особливостей конкретної системи. Таким чином, для кожного  $i$  формується тензор ентропійних приростів  $\pm \Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i$ .

Якщо топологічні обмеження примушують систему перейти в меншу кількість макростанів (звуження інверсійних областей і зниження  $S_{\text{sys}}$ ), то це потребує витрат енергії  $W$ , що виділяється в оточення й підвищує ентропію надсистеми ( $S_{\text{env}}$ ) так, що  $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{env}} \geq 0$ . Формально можна очікувати, що  $\Delta S_{\text{env}} \geq \Delta S_{\text{sys}}$ .

Таким чином, аналіз топологічної організації має враховувати енергетичний баланс і джерела дисипації (обмін теплом, зовнішня робота) як складову моделі, незважаючи на її безрозмірність.

Розгортка багатовимірної тензорної структури призводить до узагальненої матриці інцидентності, де: стовпці відповідають багатокомпонентним системам  $b_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$ , а рядки – ентропійним вкладкам за властивостями системи  $i$ . Значення у клітинках матриці – знаки  $\text{sign}(\Delta S^i) \in \{+, -\}$ , таким чином, щоб модель повністю переходила у топологічно-знакову форму. Найпростіша форма такого переходу представляє багатовимірний ентропійно-структурований циліндр (рис. 6, а). Такий циліндр являє собою орієнтоване ентропійне  $i$ -шарування, де підстава відповідає простору багатокомпонентних систем, а вертикальні

шари – ортогональним ентропійним вкладкам. При обході замкнутого шляху знаки ентропійних приростів зберігаються, що відповідає циліндричній ідентифікації.



**Рис. 6. Профіль знаку ентропії вздовж замкнутого шляху на топологічно орієнтованій поверхні циліндра (а) та в його інверсній області (б)**

Розгортка циліндра у прямокутну область відповідає переходу від геометричного розшарування до багатовимірному ( $i = 1, 1, N$ ) матрично-тензорного подання (рис. 6, б). Така форма, як і у випадку двовимірних матриць інцидентності, є еквівалентною узагальненій багатовимірній матриці інцидентності та зручною для аналітичної обробки ентропійних внесків від кожного з  $i$ -х шарів. Сукупність тензорів  $\pm \Delta S^i_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$  утворює розшарування, яке описується відображенням

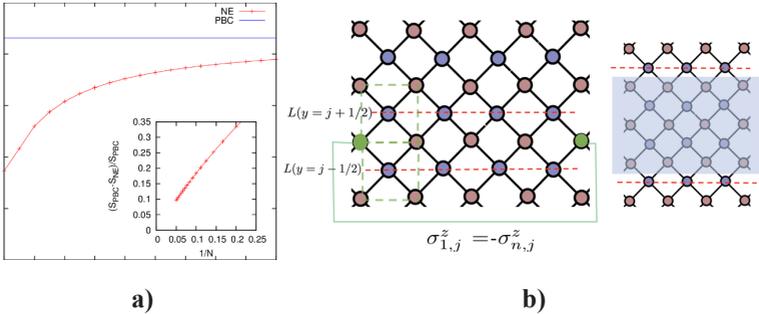
$$\pi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{H}, \tag{10}$$

де база  $\mathcal{H}$  – це простір багатокомпонентних систем, а шар – ентропійний простір вкладок  $i$ . Таке розшарування є топологічно еквівалентним багатовимірному топологічно орієнтованому циліндру зі збереженням структури зв'язності та знакових характеристик

$$: \mathcal{C}^{(N)} = \mathcal{H} \times [0, 1]^N. \tag{11}$$

Антиперіодичність у системі (рис. 7) проявляється в тому, що після обходу замкненої траєкторії ентропійний внесок змінює знак  $sign(\Delta S^i) \in \{+, -\}$  і система набуває ознак неорієнтованої поведінки. Така поведінка стає несумісною з двобічною, топологічно орієнтовною

циліндричною ідентифікацією та вказує на необхідність переходу до неорієнтовної топології, а також на обмеженість кількості незалежних станів системи. Таким чином, сама топологія накладає структурні обмеження, які проявляються як зменшення кількості ступенів свободи і, відповідно, як зміна статистичних властивостей ентропії.



**Рис. 7.** Антиперіодичний профіль ентропійного внеску для багатовимірної багатокomпонентної складної системи (a) та її ізингова модель у вигляді прямокутної матриці (b) (за даними роботи<sup>10</sup>)

Якщо для деякого набору вкладок при обході замкненого циклу в просторі  $\mathcal{H}$  виконується перетворення

$$+\Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i \rightarrow -\Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i, \quad (12)$$

то циліндрична ідентифікація стає неможливою. У цьому випадку виникає неорієнтовне розшарування, яке узагальнює систему на багатовимірний випадок, зокрема, на нелінійні локальні крос-капи або ж сімейство антиперіодичних поверхней за знаком смуг над гіперграфом. Формально це подається у вигляді

$$(x, i) \sim (x, 1-i), \text{ де } i \in \{0, 1\}^N. \quad (13)$$

Для оцінювання об'єктивності такого переходу в межах знеособлених матриць інцидентності введемо поняття оператора переходу

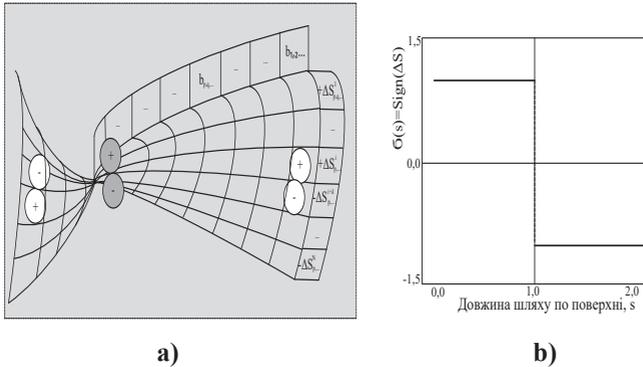
$$\mathcal{L} : \Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i \mapsto -\Delta S_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^i, \quad (14)$$

<sup>10</sup> Enderton H.B. Elements of Set Theory. Academic Press, New York, 1977, pp. 67-69.

$$\mathcal{L} : \Delta S^i_{(p_1, p_2, \dots, p_k)} \mapsto -\Delta S^i_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}, \quad (15)$$

який володіє властивостями інволютивності ( $\mathcal{L}^2 = \text{Id}$ ), нелокальності та топологічної зумовленості. У багатоконпонентних складних системах такий оператор  $\mathcal{L}$  діє не на окрему комірку, а на цілі області комірок у підпросторі тензора суміжності  $i$ , відповідно, тензора інцидентності.

Отримана в такий спосіб однобічність антиперіодичної топологічної моделі призводить до зміни характеру термодинамічних траєкторій системи, що еволюціонує вздовж такої поверхні. Система зазнає додаткового «скручування» у фазовому просторі, що може як посилювати, так і послаблювати хаотизацію, змінювати ступінь перемішування та формувати альтернативні шляхи самоорганізації системи порівняно зі звичайними двобічними поверхнями (рис. 8, а). Тому швидкість зростання термодинамічної неупорядкованості або, навпаки, схильність до формування впорядкованих структур визначається не лише внутрішніми (у даному випадку – термодинамічними) взаємодіями складної системи, але й її глобальними топологічними властивостями. Така модель є прикладом того, як суто геометричні та топологічні властивості простору можуть керувати ентропійними закономірностями складних систем.

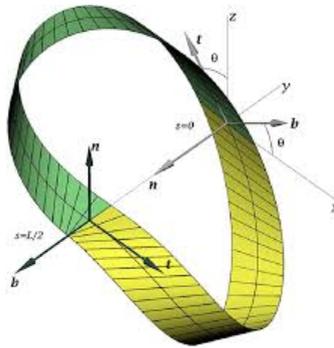


**Рис. 8. Розгортка топологічно ентропійно-інцидентної області циліндра (а) та інволютивність оператора знакової інверсії за першим параметром обходу (б)**

Наприклад, за одного повного шляху обходу траєкторії аперіодичного циліндра (рис. 8, б) знак ентропійного внеску для цілого тензорного підпростору інвертується, а відновлення початкового знаку відбувається лише після подвійного циклу, аналогічно до випадку неорієнтовних

розшарувань на топологічних поверхнях, зокрема, стрічки Мьобіуса (рис. 9). Такий графік наочно демонструє дію оператора багатовимірної знакової інверсії, зумовленої глобальною неорієнтовністю простору станів.

Отримана таким чином модель має низку переваг, оскільки, поєднуючи гіперграфи, тензори, топологію та термодинаміку, вона пояснює співіснування процесів самоорганізації й дезорганізації та демонструє, що ентропія складної системи є не лише станозалежною, а й траєкторно залежною величиною. Слід особливо підкреслити, що неорієнтовність у цьому випадку є не тільки суто математичною описовістю, а й відображає багатофакторність властивостей, фізичну та інформаційну неоднозначність складних систем. Запропонована



**Рис. 9. Ілюстративний приклад багатовимірної знакової інверсії в неорієнтованому просторі з антиперіодичним станом (за даними роботи<sup>11</sup>)**

модель природно застосовна до широкого класу складних багатокомпонентних систем і була апробована на системах виробництва багатокомпонентних сумішей різного призначення, у технологіях рециклінгу металургійних відходів, під час дослідження техногенних екосистем широкого класу, а також у людино-машинних системах тощо.

### 3. Природне прикладне значення моделі

Модель дає змогу відрізнити якісно реальну системну стійкість складної системи від її ілюзії, що виникає внаслідок адитивної компенсації ентропійних знаків і топологічної неоднозначності структури.

<sup>11</sup> Enderton H.B. Elements of Set Theory. *Academic Press*, New York, 1977, p. 67.

Прикладне та практичне застосування ентропійно-топологічної моделі багатокомпонентних складних систем полягає у її використанні для аналізу там, де неможливо коректно застосування методів адитивної ентропії, усереднених показників або локальних критеріїв оптимальності. Модель дозволяє виявляти приховані антагоністичні ефекти, коли поліпшення за однією властивістю призводить до погіршення системи за іншою (що демонструється на основі ентропійно-матричного аналізу складних систем); визначає шляхозалежність інтегральних характеристик (коли результат залежить від порядку та способу аналізу, змішування, навантаження); формально розрізняє стійку самоорганізацію та псевдоупорядкування, що виникає внаслідок компенсації знаків змін ентропії. Модель дає змогу працювати з системами, в яких результуючий знак ефекту ( $\pm\Delta S_{(p,q,\dots)}^i$ ) є важливішим за величину його абсолютного значення ( $\Delta S_{(p,q,\dots)}^i$ ). Це робить модель інструментом діагностики, а не лише опису.

Для будь-якої практичної системи модель застосовується за єдиною універсальною прикладною схемою.

Формується гіперграф системи, у якому компоненти виступають вершинами графа, а реальні поєднання компонентів – гіперребрами.

Будується тензор суміжності з дотриманням умови: якщо елемент є ненульовим, то відповідна система реально існує або може бути реалізована.

Виконується ортогональна ентропійна декомпозиція (структурна, енергетична, інформаційна, хімічна, геометрична тощо).

Аналізується знакова структура ( $\pm\Delta S_{(p,q,\dots)}^i$ ):

– періодичність відповідає циліндричній топології та якісному аналізу;

– антиперіодичність дає змогу використовувати закономірності неорієнтованої топології.

Формується практичний висновок щодо стану системи, а саме: її стійкості, чутливості до шляху зміни ентропії, а також необхідності та можливостей керування нею на рівні конфігурації, а не окремих параметрів.

По суті, чим вищою є розмірність комбінації складної системи, тим швидше зростає частка її знаково-симетричних (фрустрованих) класів, для яких орієнтована топологія стає нестійкою. Тому парні матриці майже завжди мають циліндричну топологію, тоді як гіперсистеми майже неминуче описуються як антиперіодичні або як їх узагальнення. За таких умов інтегральна ентропія стає шляхозалежною величиною. Саме тому в прикладному аналізі не перебираються всі можливі конфігурації,

а відразу визначається їхній клас знакової симетрії. На цій основі вже можна прогнозувати топологію, стійкість і допустимість застосування адитивних критеріїв.

Розглянемо декілька прикладів прикладного аналізу (табл. 2).

**Приклад 1.** Багатокомпонентні промислові суміші (металургія, відходи).

**Завдання.** Оцінити, чи призведе додавання нового компонента до реального покращення кінцевого продукту рециклінгу – металургійної суміші.

Класичний підхід передбачає порівняння систем (металургійних сумішей для повторного використання в межах рециклінгу) за їхніми міцнісними характеристиками, густиною, виходом придатної продукції.

У запропонованій методиці гіперребра розглядаються як реальні композиції, а внесок  $i$ -го шару відображає хімічну стабільність, структуру, енергію активації тощо та фіксується, зокрема, у випадках, коли  $\Delta S_{4,1,7}^{struct} > 0$  или  $\Delta S_{1,3,9}^{chem} < 0$ . Отриманий результат для тривимірної матриці суміжності  $b_{(4,1,7)}$  та  $b_{(1,3,9)}$  вказує на рівень топологічної неорієнтованості системи ( $sign\Delta S^i \{\pm\}$ ), а отже дозволяє зробити висновок про залежність властивостей суміші від порядку змішування та умов її отримання.

Практичний висновок полягає у необхідності жорсткого контролю технології підготовки суміші, що в цьому випадку є більш критичним, ніж безпосередній підбір складу. Оптимізація за усередненими показниками, навпаки, призводить до браку.

**Приклад 2.** Техногенні екосистеми та нові потоки відходів.

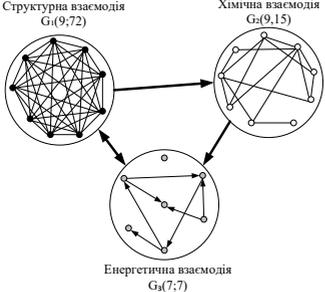
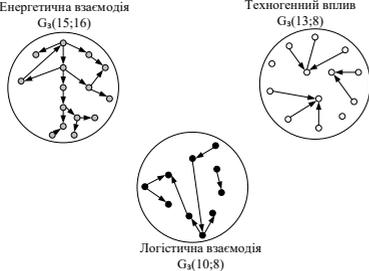
**Завдання.** Визначити, чи сприяє посилення інтеграції нових потоків відходів загальній стійкості всієї екосистеми.

Аналіз за запропонованою моделлю передбачає побудову гіперграфа, у якому вершинами є спільно функціонуючі потоки, а ребрами – ентропійні вкладки: енергетична, екологічна, логістична тощо. При цьому, наприклад, у системі виявляється антиперіодичність екологічного внеску, тобто поява нових потоків відходоутворення призводить до інверсної поведінки системи для окремих потоків із  $\Delta S_{4,1,7}^{conf} > 0$ ,  $\Delta S_{3,6,11}^{proc} < 0$ .

**Результат.** Аналіз за інверсними моделями показує, що інтегральна ентропія потоків відходоутворення як багатокомпонентних систем залежить від маршруту перерозподілу цих потоків. Подальший практичний висновок полягає у необхідності оптимізації архітектури зв'язків між потоками відходоутворення, а не дослідження окремих потоків ізольовано.

**Приклад 3.** Розглянемо людино-машинні та інтелектуальні системи заданої конфігурації.

**Вихідні та розрахункові дані щодо аналізу деяких складних систем  
ентропійно-топологічним методом**

Гіперграфова тензорна модель	Показники системи
Багатокомпонентні металургійні суміші	
 <p>Структурна взаємодія <math>G_4(9;72)</math></p> <p>Хімічна взаємодія <math>G_4(9;15)</math></p> <p>Енергетична взаємодія <math>G_4(7;7)</math></p>	<p>Кількість компонентів в системі</p> $b_p = 9$
	<p>Кількість композицій сумішей в системі</p> $b_{p,q,r,t,\dots} = 36 + 84 + 126 = 246$ <p>(2-, 3-, 4-хмерности)</p>
	<p>Кількість функціональних зв'язків у системі</p> $(b_p b_q \dots) = 20$
	<p>Кількість показників ентропії для контролю</p> $\Delta S_{(p,q,\dots)}^i = 6$
	<p>Значення зміни ентропії в аперіодичних моделях системи: <math>\Delta S_{4,1,7}^{struct} = +0,78 \text{ y.o.}</math>,</p> $\Delta S_{1,3,9}^{chem} = -0,54 \text{ y.o.}$
Техногенно залежні екосистеми та потоки відходів	
 <p>Енергетична взаємодія <math>G_4(15;16)</math></p> <p>Техногенний вплив <math>G_4(13;8)</math></p> <p>Логістична взаємодія <math>G_4(10;8)</math></p>	<p>Кількість компонентів в системі <math>b_p = 15</math></p>
	<p>Кількість композицій сумішей в системі</p> $b_{p,q,r,t,\dots} = 105 + 455 + 1365 = 1925$ <p>(2-, 3-, 4-хмерности)</p>
	<p>Кількість функціональних зв'язків у системі</p> $(b_p b_q \dots) = 72$
	<p>Кількість показників ентропії для контролю</p> $\Delta S_{(p,q,\dots)}^i = 5$
	<p>Значення зміни ентропії в аперіодичних моделях системи: <math>\Delta S_{4,1,7}^{conf} = +0,96 \text{ y.o.}</math>,</p> $\Delta S_{3,6,11}^{proc} = -0,37 \text{ y.o.}$

Людино-машинні системи та AI	
<p>Інформаційна взаємодія <math>G_6(12;21)</math></p> <p>Когнітивна взаємодія <math>G_6(12;20)</math></p> <p>Енергетична взаємодія <math>G_5(8;16)</math></p> <p>Топологічна взаємодія <math>G_5(9;20)</math></p>	Кількість компонентів в системі $b_p = 12$
	Кількість композицій сумішей в системі $b_{p,q,r,t,\dots} = 11044$
	Кількість функціональних зв'язків у системі $(b_p b_q \dots) = 77$
	Кількість показників ентропії для контролю $\Delta S_{(p,q,\dots)}^i = 4$
	Значення зміни ентропії в аперіодичних моделях системи: $\Delta S_{3,6,10,11}^{inf} = +0,54 \text{ y.o.}, \Delta S_{1,9,11}^{cogn} = -0,61 \text{ y.o.}$

**Завдання.** Оцінити ефект упровадження нового AI-модуля в наявну систему керування.

Прикладний аналіз за наведеною вище схемою ґрунтується на особливостях гіперграфа у вигляді вершин-компонентів: людина, алгоритм, інтерфейс, середовище, та ребер-вкладок у вигляді інформаційної, когнітивної, енергетичної, топологічної та ін. складових системи. Результат такого якісного аналізу дає однозначні знаки  $\Delta S_{3,6,10,11}^{inf} > 0, \Delta S_{1,9,11}^{cogn} < 0$ , з яких випливає принципово новий висновок про виникнення антиперіодичного топологічного стану в когнітивному просторі системи. Це означає зростання ролі людини в системі під час упровадження нового AI-модуля, а саме: будь-яке підвищення інформаційної ефективності системи супроводжуватиметься зниженням її загальної керованості. У такому разі це вимагатиме не структурних змін у системі, а компенсувальних інтерфейсних рішень з боку людини.

Зведені дані таких досліджень згруповано в таблиці 3.

За наявності 15 компонентів понад 70 % усіх знакових конфігурацій належать до фрустрованих класів  $(1-, 1+)$ ,  $(1-, 2+)$ ,  $(2-, 1+)$ ,  $(2-, 2+)$ , у яких орієнтовна (циліндрична) топологія стає структурно нестійкою. Це означає, що для систем такої розмірності парні матриці суміжності описують лише незначну частину простору станів, тоді як домінуючими є неорієнтовні топологічні режими. За цих умов ентропія неминуче набуває маршрутної (шляхозалежної) природи.

Таблиця 3

Узагальнені дані щодо класів знакової симетрії для задачі техногенно залежних екосистем та потоків відходів, що їх зумовлюють

Клас знакової симетрії			Структура			Число комбінацій			Знакові стани на комбінацію			Всього Станів		
2D	3D	4D	2D	3D	4D	2D	3D	4D	2D	3D	4D	2D	3D	4D
0-,2+	0-,3+	0-,4+	++	+++	++++	105	455	1365	1	1	1	105	455	1365
1-,1+	1-,2+	1-,3+	+-	++-	+++-	105	455	1365	2	3	4	210	1365	5460
2-,0+	2-,1+	2-,2+	--	+--	++--	105	455	1365	1	3	6	105	1365	8190
-	3-,0+	3-,1+		---	+---		455	1365	4	1	4		455	5460
-		4-,0+			----			1365			1			1365
						105	455	1365		8	16	420	3640	21840

Ми бачимо, що запропонована ентропійно-топологічна модель є практично застосовною в тих випадках, коли складна система включає велику кількість компонентів та їхніх комбінацій, виникає конкуренція механізмів упорядкування, а сама система характеризується високою чутливістю до компонентної конфігурації. Очевидними та типовими сферами застосування є багатокомпонентні матеріали й суміші, перероблення відходів, техногенні екосистеми, складні логістичні мережі, гібридні людино-машинні системи та системи штучного інтелекту. Подібні дослідження можливі також і для інших типів складних систем.

## ВИСНОВКИ

1. Запропонована ентропійно-топологічна модель багатокомпонентних складних систем у межах їхнього «носія» заснована на:

- якісному складі багатовимірних матриць суміжності та інцидентності;
- ентропійній ортогональній декомпозиції;
- циліндричних і неорієнтованих розшаруваннях;
- операторі знакової інверсії,

Модель відкриває можливості подальшого розвитку у напрямі одночасної інваріантності: гомологічного опису структури системи та когомологічного розподілу зв'язків і функцій знакових структур та ентропійних потоків.

2. Наведені приклади можливостей моделі для різних складних систем в галузях інженерних, інформаційних та екологічних систем.

## АНОТАЦІЯ

У роботі розвивається концепція топологічного аналізу моделей складних систем, побудованих на основі ентропійно структурованих

матриць суміжності в їхній топологічній інтерпретації, та запропоновано строгу формалізацію переходу від циліндричної моделі шаруватих ентропійних матриць суміжності до моделей із неорієнтовною поверхнею. Розгортання циліндра на площину з подальшою ідентифікацією меж демонструє схильність таких матриць з ентропійним наповненням комірок до антиперіодичної орієнтації, а згодом – до матриці інцидентності знакового типу, що допускає інтерпретацію в термінах неорієнтовних поверхонь. Показано, що ентропійна декомпозиція за ортогональними властивостями приводить до природної інтерпретації таких систем у вигляді багатовимірних циліндричних розшарувань та обґрунтовано необхідність переходу до неорієнтовних топологій. Застосування оператора знакової інверсії, який формалізує зміну орієнтації ентропійних внесків уздовж замкнених траєкторій, дає змогу виявляти приховані закономірності самоорганізації та дезорганізації у складних системах, що знаходить застосування в прикладних дослідженнях. Наведено приклади використання запропонованої моделі у складних системах металургії, екології та інформаційних системах.

### Література

1. Kivelä M., Arenas A., Barthelemy M. at all. Multilayer Networks. *Physics Reports*, Vol.544, Issues 1-2, 2014. pp.1-122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.03.001>
2. Jaynes E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, Vol. 106, No. 4, 1957, pp. 620–630.
3. Munkres J.R. Topology. Prentice Hall, *Upper Saddle River*, 2000. – 537 p.
4. Волошин В. С., Ткаленко І. А. Методика оцінки ефективності опосередкованих компліментарних систем. Зб. праць VII науково-практ. конф. «Безпека енергетики в епоху цифрової трансформації». ПІМЕ ім. Пухова, Київ, 2025. С. 51-58.
5. Hatcher A. Algebraic Topology, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002. (pp. 101–124.) – 544 p.
6. Spanier E.H. Algebraic Topology. *McGraw-Hill*, New York, 1966. pp. 300–335.
7. Edelsbrunner H., Harer J. Computational Topology: An Introduction. *American Mathematical Society*, Providence, 2010. pp. 120–160.
8. Волошин В. С., Ткаленко І. А. Методика оцінки взаємодії металургійних відходів при їх рециклінгу. Вчені записки Таврійського університету ім. В. І. Вернадського. Т.36(75), № 4, Ч.1, 2025. С.191-199.
9. Diestel R. Graph Theory. *Springer*, Berlin–Heidelberg, 2017 – 428 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3>

10. Enderton H.B. Elements of Set Theory. *Academic Press*, New York, 1977, 262 p.

11. Claude E., Shannon C. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, 1948, pp. 379–656.

**Information about the authors:**

**Voloshyn Vyacheslav Stepanovych,**

Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of energy systems,  
Priazovsky State Technical University,  
29, Gogolia ave., Dnipro, 49044, Ukraine

**Klenin Oleg Volodymyrovych,**

Doctor of Economic Sciences, Professor,  
Professor at the Department of economics engineering,  
Priazovsky State Technical University,  
29, Gogolia ave., Dnipro, 49044, Ukraine